

Lineární algebra II

Pokročileé cvičení

Pavel Klavík

Peter Žeman

[2]

Vyrobeno v programu Xournal.

Poděkování studentům pokročilých cvičení.

Podpořeno CE-ITI (GAČR P202/12/G061).

Vydal MatfyzPress,

nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty

Univerzity Karlovy,

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8,

jako svou 488. publikaci.

Tisk Reprostředisko UK MFF.

Text neprošel recenzním ani lektorským
řízením nakladatelství Matfyzpress.

Publikace byla vydána pro potřeby ITI.

Nakladatelství MatfyzPress nezodpovídá
za kvalitu & obsah textu.

© Pavel Klavík (ITI), 2015.

© Matfyzpress, nakladatelství Matematicko-
fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

ISBN: 978-80-7378-294-8.

Obsah:

5 ... Předmluva

- [7] ... Standardní skalární součin a norma
- [11] ... Abstraktní definice skalárního součinu a normy
- [17] ... Ortogonální projekce a Cauchy-Schwarzova nerovnost
- [21] ... Ortogonální báze a Gram-Schmidtova ortogonalizace
- [27] ... Metoda nejmenších čtverců a determinnty
- [31] ... Rozvoj, Cramerovo pravidlo, geometrická definice determinantu
- [37] ... Úvod do diferenciálních rovnic a vlastních čísel
- [43] ... Diagonalizace a vlastnosti vlastních čísel
- [47] ... Gershgorinova věta a analýza matic grafů
- [53] ... Schurův a spektrální rozklad matice
- [57] ... Nonormální matice a Jordanova normální forma
- [63] ... Fourierova transformace v řeči lineární algebry
- [67] ... Pozitivně definitní matice: extremy a energie
- [73] ... Sylvestrova věta o setrvačnosti a minimaxová věta
- [79] ... Literatura

[4]

Předmluva

Tyto zápisky vznikly v letním semestru 2014/15, během výuky pokročilého cvičení z lineární algebry. Myšlenka pokročilého cvičení je vytvořit speciální kruh, který se zaobírá složitějšími úlohami a problémy lineární algebry. Toto cvičení probíhá na MFF UK již několik let, od roku 2011.

Na pokročilém cvičení se nevěnujeme typickému počítání. Místo toho si studenti zkouší sami lineární algebru vybudovat: vymyslet definice a naleýt důkazy vět (tento proces vymýšlení není v tomto textu zachycen). Tím si studenti vyzkouší, jaké je vytvorění vlastní matematiky. Také si ukazujeme různé aplikace a souvislosti s jinými oblastmi matematiky.

Tento text pokrývá pouze druhý semestr lineární algebry. Pro první semestr je dostupný text Povídání o lineární algebře.

6

17.2.2015 - 1. cvičení

7

Standardní skalární součin a norma

Během několika následujících cvičeních cheeme zavést pojmy jako délka vektoru a kolmost.

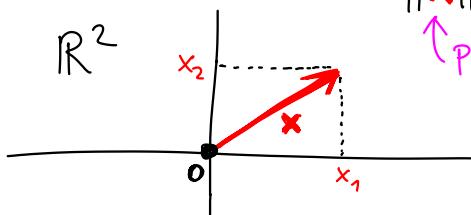
↑ neboli ortogonalita

Délka v \mathbb{R}^n (standardní norma):

$$\mathbb{R}^1 \quad \|\mathbf{x}\| = |x_1|.$$

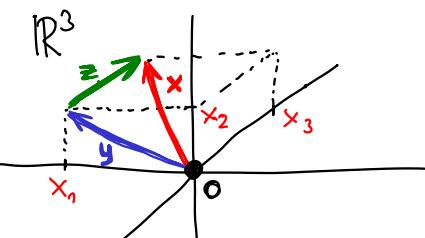


$$\mathbb{R}^2$$



$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

↑ Pythagorova věta



Obecně v \mathbb{R}^n :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\text{↑ Pythagorova věta} \quad = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

↑ Důkaz indukcí podle n , podobně jako při kroku $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Ortogonalita: Kdy jsou vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} kolmé?

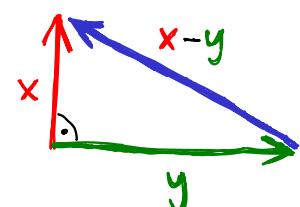
$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow$ platí Pythagorova věta v trojúhelníku:

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2$$

$$0 = -2x_1y_1 - \dots - 2x_ny_n,$$

neboli $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 0$.



8 Tento výraz se nazývá standardní skalární součin $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$. Popisuje, jak moc vektory ukazují společným směrem:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \begin{cases} = 0 & \text{kolmost (žádný společný směr),} \\ > 0 & \text{ostrý úhel mezi } \mathbf{x} \text{ a } \mathbf{y}, \\ < 0 & \text{tupý úhel mezi } \mathbf{x} \text{ a } \mathbf{y}. \end{cases}$$

Platí, že $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$.

Nulový vektor je kolmý na cokoliv.

Lemma: Nechť $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_i \neq 0$ a $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j$ pro $i \neq j$.

Potom jsou $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ lineárně nezávislé.

Důkaz: Nechť $d_1 \mathbf{x}_1 + \dots + d_k \mathbf{x}_k = 0$, vynásobme zleva \mathbf{x}_i^T .

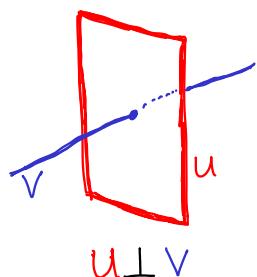
Z ortogonality je $d_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0$, tedy zbyvá $d_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = d_i \|\mathbf{x}_i\|^2 = 0$. Protože $\mathbf{x}_i \neq 0$, je $\|\mathbf{x}_i\|^2 > 0$, a tedy $d_i = 0$.

Protože i můžeme zvolit libovolně, je výše uvedená lineární kombinace $d_1 \mathbf{x}_1 + \dots + d_k \mathbf{x}_k$ triviální. \square

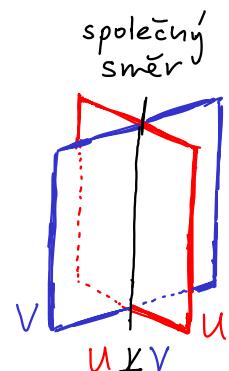
Definici ortogonality rozšíříme na podprostory:

$$U \perp V \iff \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

↑ stačí ověřit pro dvě báze



Aušak neplatí z běžného jazyka (dvě stěny místnosti jsou na sebe kolmé, ...).



Ortogonalní doplněk: $U^\perp = \{ \mathbf{v} : \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \}$.

Ortogonalní doplnky mají řadu vlastností:

[9]

- (i) U^\perp je vektorový podprostor.
- (ii) $U \cap U^\perp = \{O\}$, $\langle U \cup U^\perp \rangle = \mathbb{R}^n$, tedy
 $\dim U + \dim U^\perp = n$.
- (iii) $(U^\perp)^\perp = U$.

Dokázat vlastnost (i) a první část (ii) je snadné.

Dokažme $(U^\perp)^\perp \supseteq U$: Každý vektor $u \in U$ je kolmý na U^\perp , tedy podle definice patří do $(U^\perp)^\perp$. \square

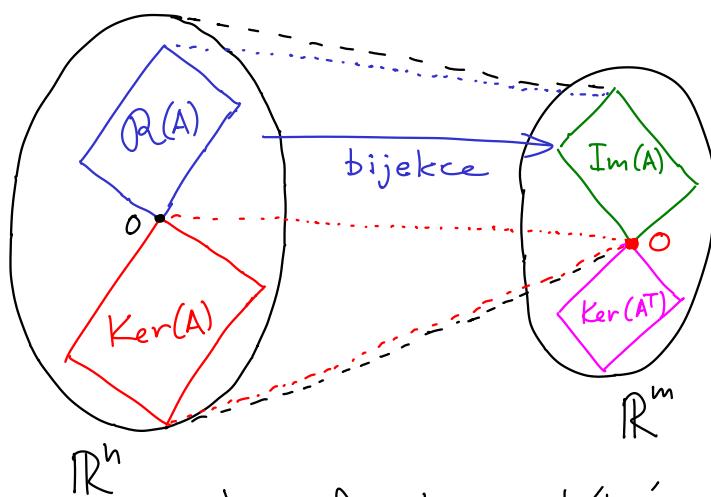
Zbytek zatím nedokážeme, potřebovali bychom vědět, že ortogonálních vektorů je hodně.

Konkrétně nás budou zajímat ortogonální báze:

Pro ně budeme chtít dokázat obdobu Steinitzovy věty, že jich je spousta.

Ukážeme, že libovolnou množinu ortogonálních vektorů lze doplnit na ortogonální bázi.

Fundamentální podprostory matice



- $Ra(A)$... řádkový podprostor,
- $Ker(A) = \{x : Ax = 0\}$
... kernel,
- $Im(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$
... obraz,
- $Ker(AT)$... levý kernel.

Jsou fundamentální pro pochopení struktury lineárního zobrazení $A : x \mapsto Ax$.

[10] V minulém semestru jsme dokázali, že $\text{Ker}(A)$ a $\text{R}(A)$ jsou lineárně nezávislé. Navíc

$$\dim \text{Ker}(A) + \dim \text{R}(A) = n,$$

podobně pro $\text{Im}(A) = \text{R}(A^T) \supset \text{Ker}(A^T)$.

Platí však mnohem silnější vlastnost:

Věta: $\text{Ker}(A) = \text{R}(A)^\perp$, $\text{Ker}(A^T) = \text{Im}(A)^\perp$.

Důkaz: Označme řádky A jako u_1^T, \dots, u_m^T .

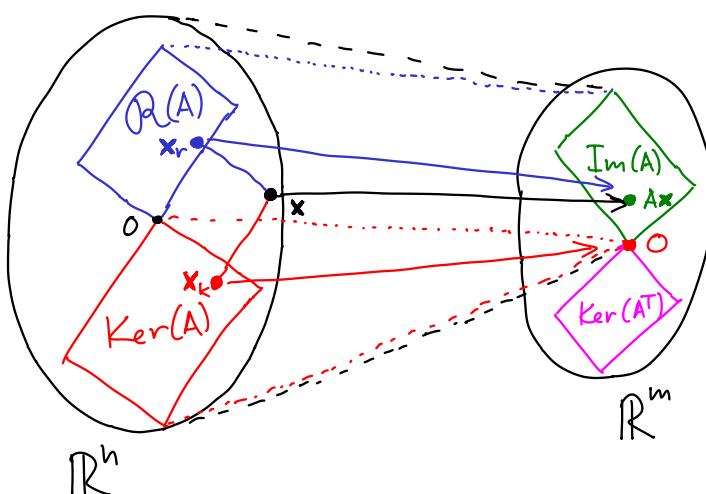
Nechtě $x \in \text{Ker}(A)$. Podle definice platí $Ax = 0$, tedy

$$u_1^T x = 0, u_2^T x = 0, \dots, u_m^T x = 0.$$

Proto je libovolná lineární kombinace $u \in \text{R}(A)$ kolmá na x .

Naopak libovolné $x \perp \text{R}(A)$ patří do $\text{Ker}(A)$. Tedy

$\text{R}(A) = \text{Ker}(A)^\perp$ a pro A^T získáme druhou rovnost. \square



Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$
lze určit ortogonální projekce $x_r \in \text{R}(A)$,
 $x_k \in \text{Ker}(A)$,
 $x = x_r + x_k$:

$$Ax_r = Ax, \quad Ax_k = 0.$$

Pokud by $A^T : \text{R}(A) \rightarrow \text{R}^m$ nebyla bijekce, potom:

$$\exists x, y \in \text{R}(A), x \neq y: Ax = Ay \Rightarrow A(x-y) = 0.$$

Tedy $x-y \in \text{R}(A) \cap \text{Ker}(A)$, což je spor.

Proto $\dim \text{R}(A) = \dim \text{Im}(A)$.

Abstraktní definice skalárního součinu a normy

Opět ilustrujme dva různé způsoby, jak lze definovat matematické objekty:

- konkrétní ... popíšeme konstrukcí, ↗ typicky první
- abstraktní ... popíšeme pouze vlastnostmi, které objekty musí splňovat.

Standardní skalární součin a norma z minulého cvičení jsou příklady prvního přístupu. Zkusíme z nich vybrat ty správné vlastnosti pro abstraktní definice.

Abstraktní definice: Skalární součin a norma jsou formy, přiřazují vektorům reálná čísla.

Norma $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ↗ lineární forma

- Linearita: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
- Trojúhelníková nerovnost: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
- Nezápornost: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \& \quad \|\mathbf{x}\| > 0 \text{ pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

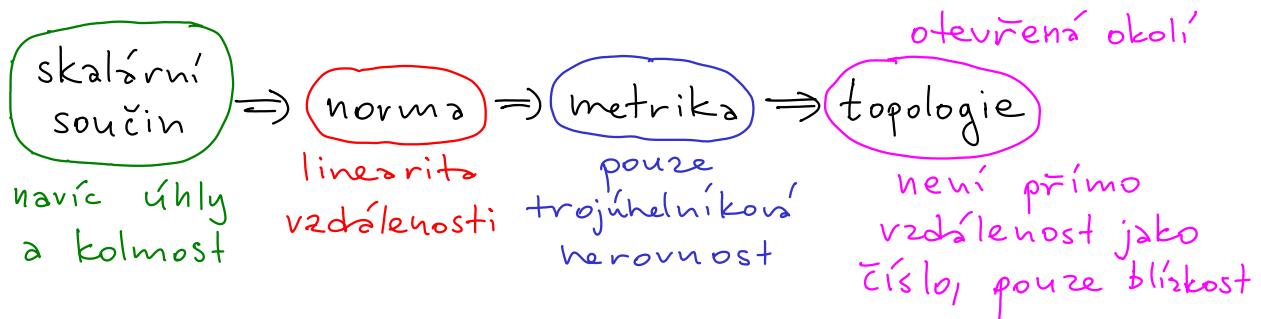
Skalární součin $\langle \cdot | \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ↗ bilineární forma

- Linearita: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle,$
 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \langle \alpha \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$.
- Symetrie: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$.
- Pozitivní definitnost: $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \& \quad \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle > 0 \text{ pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Poznámka: V C neplatí symetrie, ale $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}$, ↗ komplexní sdružení
jinak by neplatilo (iii).

12) Každý skalárni součin indukuje normu: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}$. Nejtěžší je ověřit vlastnost (ii), zatím vynecháme. Naopak jsou normy, které neodpovídají součinu.

Geometričnost vektorových prostorů:



Charakterizujme nestandardní skalárni součiny:

Příklady nestandardního součinu:

1) Zvolme reálná čísla $c_1, \dots, c_n > 0$, potom je

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum c_i x_i y_i \text{ skalárni součin.}$$

2) Jiný příklad v \mathbb{R}^2 :

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 2x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 2x_2 y_2,$$

vlastnost (iii) platí, neboť

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Tyto skalárni součiny jdou popsat maticemi jako $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$ pro vhodnou matici A, standardní skalárni součin je pro $A = I$.

Příklad 1:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Příklad 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dvě otázky: ① Pro které matici A je $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ skalárni součin?
 ② Je každý skalárni součin tohoto typu?

Zaměříme se nejprve na první otázku.

[13]

Výraz $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ se obecně nazývá bilineární forma,
neboť je to funkce $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a splňuje linearitu (ii).

→ Pro symetrii (iii) musí být A symetrická: $A = A^T$.

→ Pro pozitivní definitnost (iv) musí být matice
 A pozitivně definitní:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Jak takové matice vypadají zatím řešit nebude, nebudeme,
ukážeme si ekvivalentní definice na konci textu.

Pozorování: Kdykoliv je A symetrická pozitivně
definitní, je $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalární součin.

Věta: Libovolný skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ je roven
 $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ pro nějakou symetrickou pozitivně
definitní matici A .

Důkaz: Pokud známe skalární součin vůči libovolné
bázi, je \approx linearity jednoznačně určen.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum \sum x_i y_j \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle, \text{ kde } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Zvolme A jako Gramovu matici:

$$A = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_n \rangle \end{pmatrix}'$$

platí $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$.

① Symetrickost A
plyne \approx (ii).

② Pozitivní definitnost
plyne \approx (iv).

□

14 Pro danou symetrickou pozitivně definitní matici A budeme značit skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ a příslušnou normu $\|\mathbf{x}\|_A = \sqrt{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}$.

Jaký je geometrický význam těchto součinů/norem?

Věta: Matice A je symetrická pozitivně definitní, právě když existuje Choleského rozklad $A = R^T R$, kde R je regulární matici.
 ↗ důkaz ukážeme na konci textu

Proto $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{y} = (R\mathbf{x})^T (R\mathbf{y}) = \langle R\mathbf{x} | R\mathbf{y} \rangle$. Je to standardní skalární součin vůči jiné bázi, popsané maticí přechodu R . Podobně $\|\mathbf{x}\|_A$.

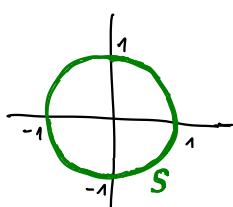
Charakterizace nestandardních norm:

Pokud na libovolné přímce zvolíme normu jednoho nenulového vektoru, je norma na přímce určena z linearity (i). Stačí popsat jednotkovou sféru

$$S = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|=1 \}.$$

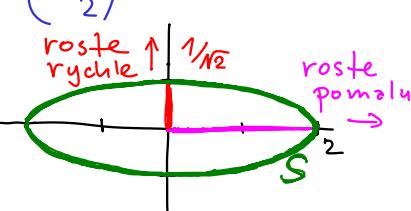
Ukážme příklady v \mathbb{R}^2 :

standardní norma



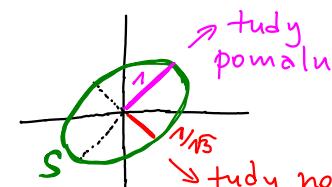
ve všech směrech
stejná norma

$\begin{pmatrix} 1/4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ -norma



elipsa s osami
v kanonických
vektorech

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ -norma



pootočená
elipsa
rostě $\sqrt{3}$ x rychleji

Věta: Pro každou A -normu $\|\cdot\|_A$ je jednotková sféra S elipsoid. ← Osy ve směru vlastních vektorů A , zatím bez důkazu. ← Budeme probírat později.

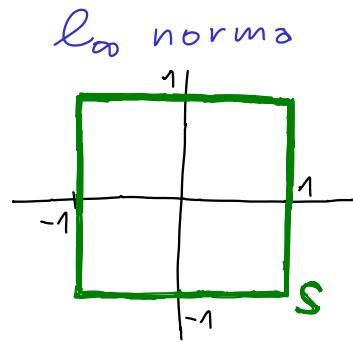
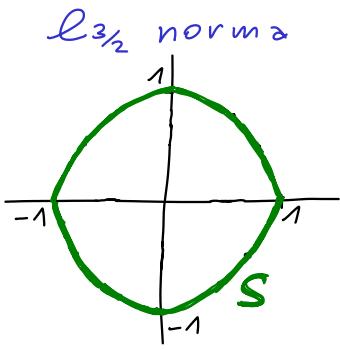
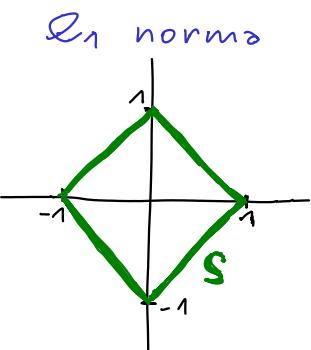
Existují ale i další normy, pro $p \neq 2$ ne definované 15
skalárním součinem:

$$\ell_p \text{ normy: } \|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1; \infty].$$

$\rightarrow \ell_2$ je standardní norma,

$\rightarrow \ell_1$ je manhattanská norma $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$,

$\rightarrow \ell_\infty$ je maximová norma $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.



Obecně jednotková sféra může být ještě méně pravidelná. Nechť $\mathbf{B} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$.

Lemma: Pro libovolnou normu platí:

- (i) \mathbf{S} obsahuje přesně dva body na každé přímce počátkem,
- (ii) \mathbf{B} je symetrická podle počátku,
- (iii) \mathbf{B} je konvexní.

Důkaz: (i) vyplývá z linearity a nezápornosti normy.

(ii) vyplývá z linearity pro $\alpha = -1$.

(iii) vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti,

čtenář si může rozmyslet. \square

Pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}$ platí pro libovolnou konvexní kombinaci, že $\|t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}\| \leq 1$.

16 Platí však i obrácená charakterizace:

Věta: Nechť B je uzavřená omezená konvexní podmnožina \mathbb{R}^n , symetrická podle počátku.

Nechť S je hranice B , že $O \notin S$.

Potom je zobrazení $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovane

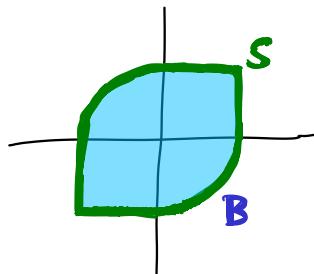
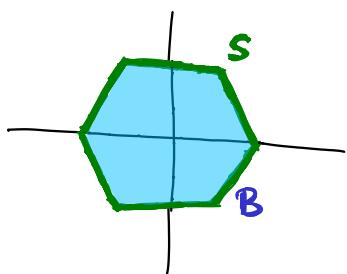
$$\|\mathbf{x}\| = |\alpha|, \text{ kde } \mathbf{x} = \alpha \mathbf{y} \text{ a } \mathbf{y} \in S,$$

norma v \mathbb{R}^n .

Důkaz: Jako cvičení, stačí ověřit vlastnosti

(i) až (iii). Nejobtížnější je trojúhelníková nerovnost. \square

Příklady obecných norm:



10.3.2015 - 3. cvičení

[17]

Ortogonalní projekce a Cauchy-Schwarzova nerovnost

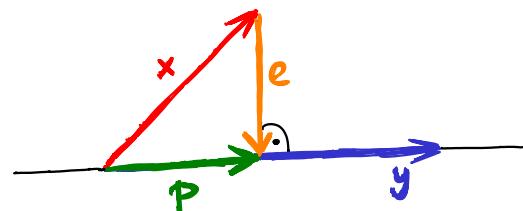
V tomto cvičení objevíme geometrickou interpretaci pro skalární součin.

Ortogonalní projekce na přímku:

Mějme dva vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Chceme nalézt kolmou projekci

\mathbf{P} vektoru \mathbf{x} na přímku $\langle \mathbf{y} \rangle$.



Má platit $\mathbf{P} = c \cdot \mathbf{y}$. Chceme zvolit c tak, aby platilo

$$\mathbf{e} = \mathbf{p} - \mathbf{x} \perp \mathbf{y}.$$

↙ dosadíme za \mathbf{p} .

$$0 = \langle \mathbf{p} - \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle c\mathbf{y} - \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = c \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle, \text{ nebož } c = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle}.$$

pouze → normovací faktor

Věta: Kolmá projekce na přímku $\langle \mathbf{y} \rangle$ je lineární zobrazení

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle} \mathbf{y}.$$

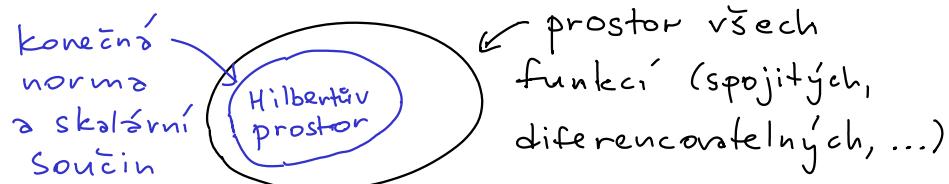
□

Cauchy-Schwarzova nerovnost:

Pro libovolné dva vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} platí $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

Motivace třeba ve funkcionální analýze, ve vektorových prostorech nekonečné dimenze. Zde mohou mít funkce nekonečnou normu, proto se omezíme na Hilbertovy podprostory pouze funkcí konečné normy.

Podle nerovnosti je i konečný skalární součin.



18. Důkaz nerovnosti:

Délka rozdílu projekce e je nezáporná, tedy i

$$0 \leq \|e\|^2 = \langle e | e \rangle = \langle p - x | p - x \rangle = \left\langle \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y - x \mid \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y - x \right\rangle =$$

staci elementarni upravy

$$= \left\langle \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y \mid \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y \right\rangle - 2 \left\langle \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y \mid x \right\rangle + \langle x | x \rangle =$$

$$= \frac{\langle x | y \rangle^2}{\langle y | y \rangle^2} \cancel{\langle y | y \rangle} - 2 \frac{\langle x | y \rangle^2}{\langle y | y \rangle} + \langle x | x \rangle,$$

Symetrie linearita

Opet linearita

neboli $\langle x | y \rangle^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle$. *Cauchy-Schwarzova nerovnost* plyne odmocněním. \square

Dokažme nyní, že skalární součin indukuje normu $\sqrt{\langle x | x \rangle}$, konkrétně že platí trojúhelníková nerovnost:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \downarrow \text{vše kladné, uvažme druhou mocninu}$$

$$\langle x+y | x+y \rangle \leq \langle x | x \rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y | y \rangle$$

$$\cancel{\langle x | x \rangle} + 2\cancel{\langle x | y \rangle} + \cancel{\langle y | y \rangle} \leq \cancel{\langle x | x \rangle} + 2\|x\|\|y\| + \cancel{\langle y | y \rangle}$$

$$\langle x | y \rangle \leq \|x\|\|y\| \rightarrow \text{Cauchy-Schwarzova nerovnost}$$

Tedy trojúhelníková nerovnost je ekvivalentní s Cauchy-Schwarzovou nerovností.

Ortogonalní projekce na obecný podprostor:

Popišme nejprve matici P kolmé projekce na přímku:

$$x \mapsto \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y, \text{ ve standardním skalárním součinu:}$$

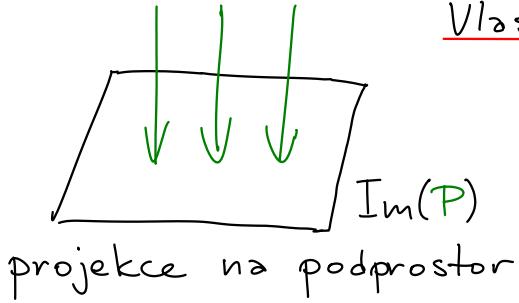
pro hodine pořadí členů

$$x \mapsto \frac{x^T y}{y^T y} y = y \frac{y^T x}{y^T y}, \text{ neboli } P = \frac{y y^T}{y^T y}.$$

Odrodit přesný předpis pro obecný podprostor je složitější, zatím se spokojíme pouze s vlastnostmi P .

Vlastnosti, co musí P splňovat:

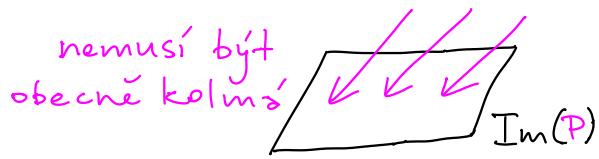
[19]



① $Im(P)$ je fixován:

$$\forall \mathbf{y} \in Im(P): P\mathbf{y} = \mathbf{y}, \text{ tedy}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: P(P\mathbf{x}) = P\mathbf{x}.$$



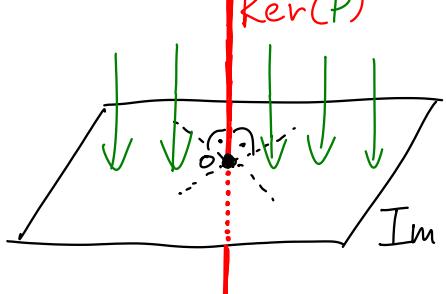
Protože to platí pro každý vektor \mathbf{x} , je $P^2 = P$.

Věta: Matice P je projekce na podprostor $Im(P)$, právě když $P^2 = P$. □

② Projekce je kolmá: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x} - P\mathbf{x} \perp Im(P)$.

Speciálně $Ker(P) \perp Im(P)$, kvůli dimenzím je

$Ker(P) = Im(P)^\perp$. Pro každou matici platí, že $Ker(P) = Q(P)^\perp$, tedy



$$Im(P) = Q(P).$$

Chceme dokázat, že $P = P^T$.

Definice transpozice přes duální zobrazení:

Platí, že pro dané lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

existuje právě jedno lineární zobrazení $f^*: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, řečeno duální zobrazení:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \quad \underbrace{\langle f(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle}_{\mathbb{R}^m} = \underbrace{\langle \mathbf{x} | f^*(\mathbf{y}) \rangle}_{\mathbb{R}^n}.$$

Dokažme alespoň, že v případě standardního skalárního součinu a maticové reprezentace A , kde f^* je reprezentováno A^T :

[20] Důkaz: Nechť A je matici, chceme zkonstruovat B tak, aby platilo $\langle Ax | y \rangle = \langle x | By \rangle$. Zjevně $B = A^T$ toto splňuje. Dokážme, že zádružná jiná matici to nesplňuje, stačí pro kanonickou bázi e_1, \dots, e_n :

$$a_{ji} = (Ae_i)_j = \sum_{k=1}^n (Ae_i)_k \cdot (e_j)_k = \sum_{k=1}^n (e_i)_k \cdot (Be_j)_k = b_{ij}.$$

nenulove'
pouze pro k=j Tedy $B = A^T$. nenulove'
pouze pro k=i

Vrátnime se k ortogonální projekci P . Dokážme, že $\langle Px | y \rangle = \langle x | Py \rangle$. Protože $\text{Ker}(P) = \text{Im}(P)^\perp$, můžeme

vyjádřit: $x = x_K + x_I$, kde $x_K, y_K \in \text{Ker}(P)$,
 $y = y_K + y_I$, $x_I, y_I \in \text{Im}(P)$.

Protože $Px = x_I$ a $Py = y_I$, dostáváme:

$$\begin{aligned} \langle Px | y \rangle &= \langle x_I | y_K + y_I \rangle = \langle x_I | y_K \rangle + \langle x_I | y_I \rangle = \\ &= 0 \quad \text{z ortogonalitou} \quad \langle x_I | y_I \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle x | Py \rangle = \langle x_K + x_I | y_I \rangle = \langle x_K | y_I \rangle + \langle x_I | y_I \rangle =$$

Tedy $P^T = P$. Naopak z této vlastnosti vyplývá, že $\text{Ker}(P) = \text{Im}(P)^\perp$, tedy projekce je ortogonální.

Věta: Projekce P je ortogonální, právě když $P = P^T$.

Brzo ukážeme, že když sloupce A tvoří bázi $\text{Im}(P)$, potom $P = A(A^T A)^{-1} A^T$, speciální případ je

$$P = \frac{(y y^T)^{-1} A^T}{(y^T y)}.$$

projekce na přímku

Jiný způsob:

P zobrazuje x na nejblížší bod $\text{Im}(P)$. Lze využít analýzu a derivace. zkuste pro projekci na přímku.

17.3.2015 - 4. cvičení

[21]

Ortogonalní báze a Gram-Schmidtova ortogonalizace

Připomenejme, že nenulové ortogonalní vektory jsou lineárně nezávislé, tedy pojem ortogonalní báze má smysl: $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \neq 0 : \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j \quad \forall i \neq j$.

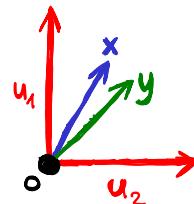
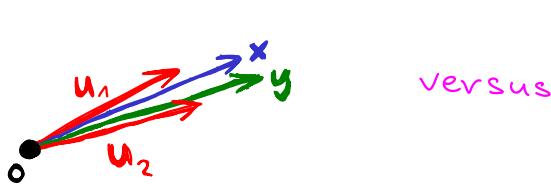
Chceme dokázat, že jich je hodně a mají bohatou strukturu:

Věta: Libovolnou množinu nenulových ortogonalních vektorů lze rozšířit na ortogonalní bázi.

Motivace: Proč jsou ortogonalní báze důležité?

→ Ortogonalní vektory ukazují maximálním možným odlišným směrem.

① Výhodné numerické vlastnosti



Souřadnice x a y vůči u_1, u_2
jsou velice odlišné,
špatné pro zaokrouhlování.

Změna v souřadnicích
je úměrná $\|x-y\|$.

Krylovův podprostor $\mathcal{K}_n(A, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \dots, A^{n-1}\mathbf{v} \rangle$ obsahuje hodně informací o matici, lze využít například k řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Probleém je, že úhly mezi vektory jsou hodně male, což při zaokrouhlování vede ke kumulaci chyb a ztrátě informace.

Řešení: konstrukce ortogonalní báze $\mathcal{K}_n(A, \mathbf{v})$.
(tzv. Arnoldiho algoritmus)

[22] ② Snadný výpočet souřadnic pomocí ortogonálních projekcí, zatímco pro obecné báze je to řešení soustavy $A\alpha = x$.

Lemma: Pro ortogonální bázi v_1, \dots, v_n je $x = \sum \alpha_i v_i$, kde $\alpha_i = \frac{\langle x | v_i \rangle}{\langle v_i | v_i \rangle}$. kolmá projekce na jednotlivé přímky

Důkaz: $\langle x | v_i \rangle = \langle \sum \alpha_i v_i | v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i | v_i \rangle$. \square

Mnohem snazší než pro obecné báze.

Základní myšlenka Fourierovy řady:

Hladké funkce $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor se standardním skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx. \quad \begin{matrix} \text{je jako } \Sigma \\ \text{rozmyslete si, že splňuje} \\ \text{vlastnosti (i) až (iii).} \end{matrix}$$

Množina funkcí $B = \{ \cos(nx), \sin(nx), 1 : n \in \mathbb{N} \}$ je ortogonální, což lze ověřit výpočtem integrálů.

Fourierova řada $f(x) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_1^{\infty} b_n \sin(nx)$,

kde $a_n = \frac{\langle f(x) | \cos(nx) \rangle}{\langle \cos(nx) | \cos(nx) \rangle}, \quad b_n = \frac{\langle f(x) | \sin(nx) \rangle}{\langle \sin(nx) | \sin(nx) \rangle}.$

Za určitých podmínek konverguje k $f(x)$, pokud $f(x) \in \langle B \rangle$. Je to aplikace lemmatu, souřadnice jsou ortogonální projekce na přímky vektoru B .

V analýze se řeší, které funkce leží v $\langle B \rangle$ a které vlastnosti jsou zachovány řadami funkcí. Lze uvažovat i na obecnějších prostorech.

První důkaz věty - fundamentální podprostory

23

Nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ je ortogonální množina, dejme je do řádků matice A. Tedy

$$R(A) = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle, \quad \dim \text{Ker}(A) = n-k.$$

Protože $\text{Ker}(A) = R(A)^\perp$, můžeme zvolit libovolný vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_{k+1} \in \text{Ker}(A)$, čímž zvětšíme ortogonální množinu o jedna. Opakováním vytvoříme řádky. □

Gram-Schmidtova ortogonalizace:

Z lineárně nezávislé množiny vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vytvoří ortogonální množinu $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ stejného obalu.

Vektory ortogonalizujeme krok za krokem:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{a}_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{q}_j \rangle}{\langle \mathbf{q}_j | \mathbf{q}_j \rangle} \mathbf{q}_j}_{\text{odečítáme kolmé projekce na } \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{i-1}} = \mathbf{b}_i$$

Důkaz správnosti:

Je zjevné, že $\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$. Nevíme však, že $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ jsou ortogonální, budeme dokázat indukcí:

$$\langle \mathbf{q}_i | \mathbf{q}_t \rangle = \left\langle \mathbf{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{q}_j \rangle}{\langle \mathbf{q}_j | \mathbf{q}_j \rangle} \mathbf{q}_j \mid \mathbf{q}_t \right\rangle \stackrel{\text{lineárto}}{=} \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{q}_t \rangle -$$

$\forall t < i$

nenulové pouze pro $j=t$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{q}_j \rangle}{\langle \mathbf{q}_j | \mathbf{q}_j \rangle} \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{q}_t \rangle = \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{q}_t \rangle - \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{q}_t \rangle = 0.$$

Vlastně platí, že \mathbf{b}_i je kolmá projekce \mathbf{a}_i na podprostor $\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{i-1} \rangle$.

[24] Je možné vektory $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ průběžně normovat
 → vyhnout se dělení: $\mathbf{q}_i := \frac{\mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_i\|}$, potom $\langle \mathbf{q}_i | \mathbf{q}_j \rangle = 1$.

Druhý důkaz věty - přes Gram-Schmidtovu ortogonalizaci
 Mužinu $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ libovolně doplňme na bázi a aplikujeme ortogonalizaci. □

Ortogonalní matice: Matice Q je ortogonalní, pokud má ortonormální sloupce.

↑ ortogonalita + norma rovna jedné

Platí, že $Q^T Q = I_n$, tedy Q^T je levá inverze Q^{-1} .
 Pro čtvercové matice Q je Q^T jejich inverze.

↑ sloupce jsou ortogonalní bázi

K ② motivaci: Vyjádření souřadnic vůči obecné bázi
 vede na $A\alpha = \mathbf{x}$, pro ortogonalní bázi na $Q\alpha = \mathbf{x}$, kde
 $\alpha = Q^T Q\alpha = Q^T \mathbf{x}$, což odpovídá skalárním
součinům u kolmých projekcí.

↑ alternativně $\alpha = A^{-1} \mathbf{x} = Q^T \mathbf{x}$, řešení inverzní maticí

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{q}_1- \\ -\mathbf{q}_2- \\ \vdots \\ -\mathbf{q}_n- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x} | \mathbf{q}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x} | \mathbf{q}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x} | \mathbf{q}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Vlastnosti ortogonalních matic

→ Součin dvou ortogonalních matic $Q_1 Q_2$ je ortogonalní.
 Ortogonalní matice tvoří grupu O_n , geometricky
 jsou to rotační a zrcadlení. Podgrupa poloviční
 velikosti SO_n je tvořena jen rotacemi.

↑ speciální ortogonalní grupa

→ Zachovávají standardní skalární součin:

$$\langle Q\mathbf{x} | Q\mathbf{y} \rangle = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^T Q\mathbf{y} = \mathbf{x}^T Q^T Q\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle.$$

Zachovávají úhly, délky: $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$. ← výhodně numericky,
 neamplifikují chyby

Maticový zápis Gram-Schmidtovy ortogonalizace:

25

Matici $A = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \\ | & | \end{bmatrix}$ transformujeme na $Q = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k \\ | & | \end{bmatrix}$,

která je ortogonální: $A R_1 R_2 \cdots R_k = Q$.

R_t jsou dvou typů:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{q}_1 \rangle & & & \\ 1 & -\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{q}_2 \rangle & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & -\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{q}_{i-1} \rangle & & & \\ 1 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right) \text{, } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{\|\mathbf{q}_i\|} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array} \right)$$

Slavný QR rozklad:

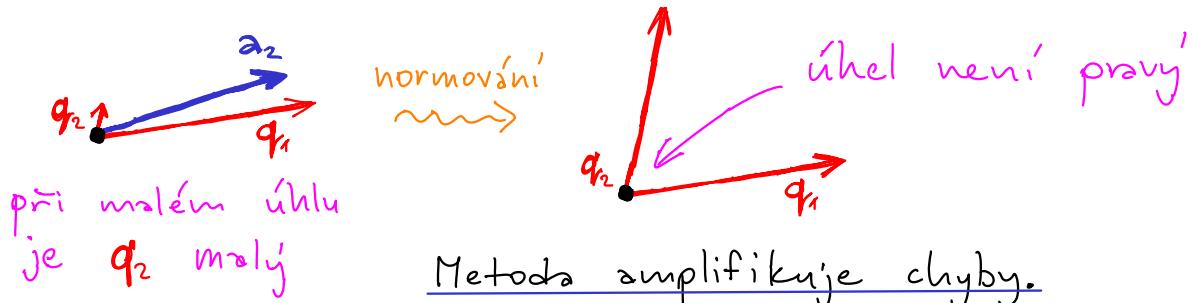
$$A = Q R \leftarrow \begin{array}{l} \text{horní} \\ \text{trojúhelníková} \end{array}$$

\uparrow ortogonální

odečítá \mathbf{b}_i

normuje \mathbf{q}_i

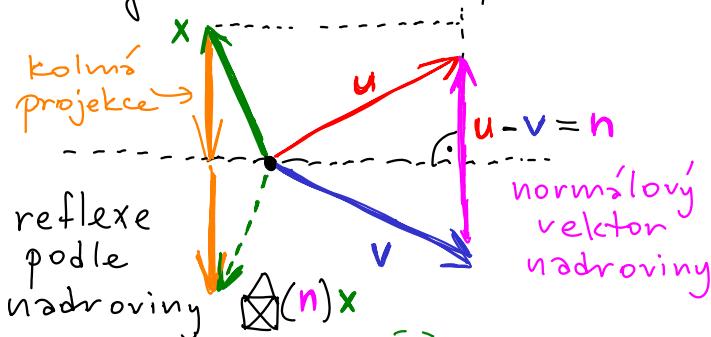
Má špatné numerické vlastnosti:



Řešení: ortogonální úpravy $Q_k \cdots Q_1 A = R$, potom R má stejné numerické vlastnosti jako A .

① Householderovy reflexe $\boxtimes(n)$

Ortogonalní matice, co zobrazuje $u \mapsto \|u\| \mathbf{e}_1 = v$.



$\boxtimes(n)x$ získáme
odečtením dvojnásobku
kolmé projekce x
na n .

Tedy $\boxtimes(n) = I - 2 \frac{(nn^T)}{n^T n}$ ← matice kolmé projekce na přímku

26

$$\triangle (a_1 - \|a_1\|e_1) \cdot A = \begin{bmatrix} \|a_1\| & \boxed{\begin{array}{c|c} \diagup & \\ \diagdown & \\ \vdots & \\ \diagup & \\ \diagdown & \end{array}} \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}, \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & \triangle \\ \vdots & \vdots \\ \triangle & \end{array} \right) \triangle \cdot A = \begin{bmatrix} * & * \\ \vdots & \vdots \\ * & * \\ 0 & \vdots \\ 0 & \end{bmatrix} \boxed{\begin{array}{c|c} \diagup & \\ \diagdown & \\ \vdots & \\ \diagup & \\ \diagdown & \end{array}},$$

a tak dál. Získáme $A = QR$ po $n-1$ krocích.

② Givensovy rotace:

Vyrobi pouze jednu O , musíme násobit $O(n^2)$ -krát, vhodné pro matice s hodně nulami.

Uvažme rovinu určenou e_i a e_j , v ní rotvujeme:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mapsto v = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \sqrt{u_i^2 + u_j^2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

pouze dvě souřadnice změněny

$$R_{i,j}^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \cos \varphi & -\sin \varphi & \\ & & \sin \varphi & \cos \varphi & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \arccos \left(\frac{u_i}{\sqrt{u_i^2 + u_j^2}} \right).$$

vhodné úhly

$$R_{1,n}^{\varphi_{1,n}} \cdots R_{1,3}^{\varphi_{1,3}} R_{1,2}^{\varphi_{1,2}} A = R_{1,n}^{\varphi_{1,n}} \cdots R_{1,3}^{\varphi_{1,3}} \boxed{\begin{array}{c|c} * & \boxed{\begin{array}{c|c} \diagup & \\ \diagdown & \\ \vdots & \\ \diagup & \\ \diagdown & \end{array}} \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}} = \cdots = \boxed{\begin{array}{c|c} * & \boxed{\begin{array}{c|c} \diagup & \\ \diagdown & \\ \vdots & \\ \diagup & \\ \diagdown & \end{array}} \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}}$$

původní část A

a doděláme zbytek podobně jako v ①

24.3.2015 - 5. cvičení

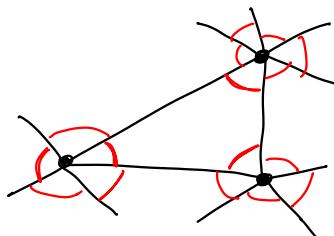
[27]

Metoda nejmenších čtverců a determinanty

Mějme soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, řešení existuje $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{Im}(A)$.

Když řešení existuje, umíme ho najít. Co když není?

V řadě aplikací nějaké řešení chceme najít.



Problémem se zabýval Gauss
v zeměměřictví. Představme
si, že chceme určit polohy
bodů ze znalosti vzdáleností
a úhlů.

více rovnic než neznámých,
typicky neexistuje řešení

Příklad:

Řešení existuje

pouze tehdy,

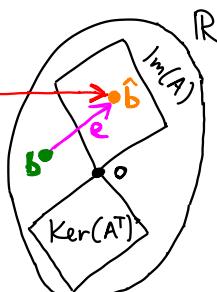
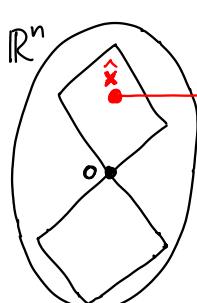
když jsou pravé,

strany v poměru

2:3:4.

Pokud pravá strana
pochází z měření,
typicky nebude platit
kvůli chybám.

Mohli bychom cást rovnic vynechat, ale to bychom museli předpokládat, že chyba je jen v některých, což není typické. Chceme co nejméně změnit pravou stranu, aby řešení existovalo.



Metoda nejmenších čtverců:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$... nemá řešení

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$... chceme vynásit,

kde $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$ je nejbližší vektor
k \mathbf{b} , tedy kolmo projekce na $\text{Im}(A)$.

min.
součtu
čtverců
rozdíln

Ve statistice se toto nazývá lineární regrese.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

určeno modellem

data

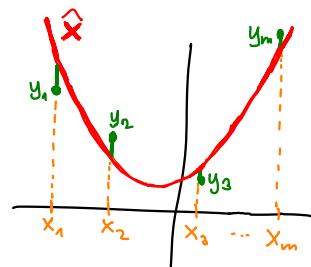
Například data jsou dvojice (x_i, y_i) ,
model je, že leží na parabole.

Hledáme neznámé α, β, γ , aby platilo
 $\alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma = y_i$.

[28] Dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2 & x_m & 1 & y_m \end{array} \right)$$

Typicky nebude existovat přesné řešení.



Existuje i totální metoda nejménších čtverců:

Chceme upravit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ na $\hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$, aby se minimalizovaly rozdíly $A - \hat{A}$, $\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}$. Situace, kdy nedověřujeme modelu. ← Matematicky složité, nebudem řešit.

Jak vyřešit nejménší čtverce?

$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$, platí, že $\mathbf{e} \perp \text{Im}(A)$, neboť $\mathbf{e} \in \text{Ker}(A^\top)$.

$$0 = A^\top \mathbf{e} = A^\top (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) = A^\top (A \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}),$$

$$A^\top A \hat{\mathbf{x}} = A^\top \mathbf{b}. \quad \text{← normální rovnice}$$

Předpokládejme, že $A^\top A$ je regulární, potom

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b} \quad \text{a} \quad \hat{\mathbf{b}} = \underbrace{A(A^\top A)^{-1} A^\top}_{\text{Matice P kolmé projekce}} \mathbf{b}.$$

Lze snadno ověřit, že ← Matice P kolmé projekce splňuje $P^2 = P \Rightarrow P^\top = P$.

Matice $A^\top A$ má řadu zajímavých vlastností, například je symetrická pozitivně semidefinitní.

Lemma: $\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(A)$.

Důkaz: $\text{Ker}(A^\top A) \supseteq \text{Ker}(A)$: $A\mathbf{x} = 0 \Rightarrow A^\top A\mathbf{x} = 0$.

$\text{Ker}(A^\top A) \subseteq \text{Ker}(A)$: $A^\top A\mathbf{x} = 0$, vynásobme zleva \mathbf{x}^\top ,

$$0 = \mathbf{x}^\top A^\top A \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^\top A\mathbf{x} = \|A\mathbf{x}\|^2.$$

← Vektor má nulovou normu, právě když je nulový.

□

Proto $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$, tedy pokud má A lineárně [29]
nezávislé sloupce, je $A^T A$ regulární a existuje $(A^T A)^{-1}$.

Lze i přes QR rozklad:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow Q R \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Typicky není $Q^T Q R \mathbf{x} = Q^T \mathbf{b}$
čtvercová, proto $\mathbf{x} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$

neekvivalentní úprava: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q^T Q = I_n$.

Numericky přesnější,
protože $A^T A$ má
druhou mocninu
čísla podmíněnosti A.

Determinanty

$\det(A) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, multilineární alternující forma
(vůči sloupcům matice A).

Kolem roku 1900 klíčový pojem lineární algebry, dnes jsou v popředí jiné pojmy, třeba vlastní čísla.

Co může říct jedno číslo o matici? Ne tolik, ale překvapivě hodně!

Jak definovat determinant?

① Vlastnostmi. ← jako úkol

② Geometricky. ← příště

③ Formuli' v koeficientech:

← překvapivě těžké
zvolit správný přístup

$$\det(A) = \sum_{S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \text{sgn}(S) \prod_{i \in S} a_{i, S(i)}.$$

← není jasné, proč zrovna toto
definice je zajímavá

Příklad 3×3 :

$$\det \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{znaménko +1} - \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{znaménko -1}.$$

Chceme odvodit zajímavé vlastnosti $\det(A)$:

1) $\det(cA) = c^n \cdot \det(A)$. ← každý člen \prod je vynásoben c

2) Vynásobení libovolného řádku c vynásobí c i det.
← právě jeden člen \prod je vynásoben c

30) 3) $\det(A^T) = \det(A)$. ← Vlastnosti řádků platí i pro sloupce.

Důkaz: Inverzní permutace násobí přes indexy zrcadlově podle diagonály a má stejný známénko.

$$G = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Proto člen sumy $\det(A)$ pro G je roven členu $\det(A^T)$ pro G^{-1} , tedy $\det(A) = \det(A^T)$. □

4) Nulový řádek implikuje nulový determinant.

5) Determinant je alternující:

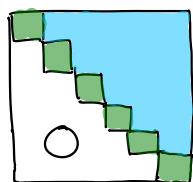
Prohození dvou řádků i a j mění známénko.

Důkaz: Pro každou permutaci G dostaneme stejné členy $\prod_i t_{ii}$ po prohození řádků při složení G s transpozicí (i,j) . Protože složení mění známénka, má determinant má opačné známénko. □

6) Dva stejné řádky \Rightarrow nulový determinant. ← stačí prohodit

7) Trojúhelníková matice T má $\det(T) = \prod_i t_{ii}$.

Každá jiná permutace násobí přes prvek → pod diagonálou, což je nula.



8) Determinant je lineární v každém řádku.

$$\det \begin{pmatrix} -a_1- \\ -a_i+b_i- \\ \vdots \\ -a_n- \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -a_1- \\ \vdots \\ -a_i- \\ \vdots \\ -a_n- \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -a_1- \\ \vdots \\ -b_i- \\ \vdots \\ -a_n- \end{pmatrix}.$$

Důkaz: Každý součin obsahuje jeden člen a_i+b_i , kte rozeplatit na dva determinnty. □

9) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ je regulérní. nemění nulovost

Důkaz: Převod do odstupňovaného tvaru a 7). □

31.3.2015 – 6. cvičení

31

Rozvoj, Cramerovo pravidlo, geometrická definice determinantu

Nejprve dokážme, že determinant je multiplikativní:

Věta: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Důkaz: Pokud je A singulární, je i AB singulární, proto jsou obě strany nulové.

Pokud je A regulární, nechť $A = E_k \cdots E_1$ je posloupnost matic elementárních úprav, o nich už víme:

$$\det(E_i) = \begin{cases} +1 & \dots \text{přičtení jednoho řádku k druhému} \\ c & \dots \text{vynásobení řádku } c \\ -1 & \dots \text{prohození dvou řádků} \end{cases}$$

$\Rightarrow \det(E_i X) = \det(E_i) \det(X)$. Proto $\det(AB) = \det(E_k \cdots E_1 B) = \det(E_k) \cdots \det(E_1) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B)$. \square

Druhý důkaz: Když A je regulární, uvážíme zobrazení
 $d(B) = \frac{\det(AB)}{\det(A)}$ a dokážeme, že je to determinant. \square

Připomeněme si hledání polynomu $P(x) = \underbrace{a_n x^n + \cdots + a_0 x^0}_{\text{prostor } P^n}$
procházejícího body $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & 1 & y_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 & y_{n+1} \end{array} \right)$$

Vandermondova matice

$$V_{n+1} \mathbf{a} = \mathbf{y}, \text{ neboli } \mathbf{a} = V_{n+1}^{-1} \mathbf{y}.$$

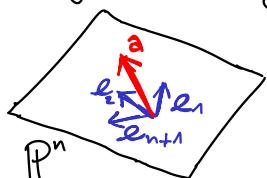
Zobrazení $P^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
vyhodnocuje polynomy

$$\forall x_1, \dots, x_{n+1}.$$

Inverze prokládá
polynom body

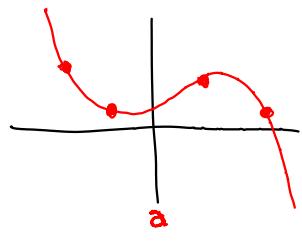
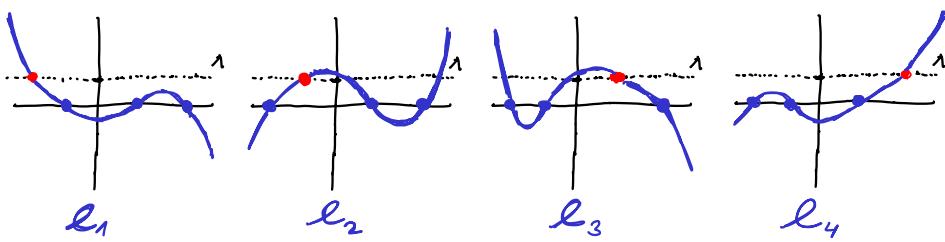
$$(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Ukázali jsme Lagrangeovu interpolaci



Hledáme neznámý polynom s koeficienty a , vůči vhodné bázi e_1, \dots, e_{n+1} . To je mnohem snažší než vůči kanonické bázi.

[32] Jak toto báze vypadá?



$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})} = \frac{\prod_{j \neq i} (x-x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i-x_j)}$$

↑ kořeny mž v $x_j, j \neq i \Rightarrow l_i(x_i) = 1.$

$a = y_1 l_1 + \cdots + y_{n+1} l_{n+1}.$

Podobné koeficienty se nachází v inverzi V_{n+1}^{-1} .

Spočítejme nyní $\det(V_{n+1})$:

První řešení: převod do odstupňovaného tvazu. ↗ trochu technické

Využijeme $A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)(A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}B^2 + \dots + B^n)$.

$$\left| \begin{array}{cccc|c} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 & \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & 1 & \end{array} \right| = \prod_{i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \left| \begin{array}{cccc|c} x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_{n+1} + \dots + x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_1 + x_{n+1} & 1 & 0 \\ x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_{n+1} + \dots + x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_2 + x_{n+1} & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_{n+1} + \dots + x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_n + x_{n+1} & 1 & 0 \\ x_{n+1}^n & & & \dots & x_{n+1}^2 x_{n+1} & 1 \end{array} \right| =$$

na řádcích 1, ..., n-1

Vn ↗ aplikujeme stejný postup na Vn

postupně eliminujeme $(-x_{n+1})$.

sloupcy zprava, zbyvají řádky pouze nejvyšší mocnina $\begin{bmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}$

$$= \prod_{i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \left| \begin{array}{cc|c} x_1^{n-1} & \dots & 0 \\ x_2^{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^{n-1} & \dots & 0 \\ \hline & & 1 \end{array} \right| = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

nic

Druhé řešení: determinant je polynom.

$\det(A)$ je polynom v koeficientech matice $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$.

$\det(V_{n+1})$ je polynom $P(x_1, \dots, x_{n+1})$ stupně $n+n-1+\dots+0 = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$.

Odečtením j-tého řádku od i-tého víme, že $P(x_1, \dots, x_{n+1})$ je dělitelný $(x_i - x_j)$.

$$P(x_1, \dots, x_{n+1}) = C \cdot \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

určujeme správný stupeň

a určíme $C = 1$. □

Laplaceův rozvoj determinantu

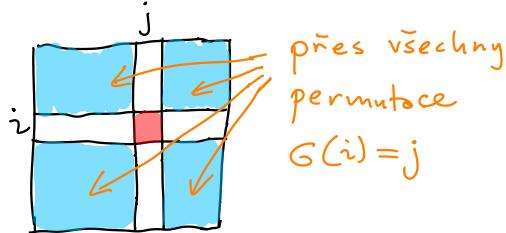
(33)

Chtěli bychom určit $\det(A)$ jako lineární kombinaci i-tého řádku:

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}.$$

Chceme určit čísla C_{ij} .

$$\det(A) = \sum_G \text{sgn}(G) \prod_i a_{i,G(i)}. \quad \leftarrow \text{Koždý člen sumy obsahuje právě jeden z koeficientů } a_{i1}, \dots, a_{in}.$$



$$C_{ij} = \pm \det \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{matrix} \text{musíme} \\ \text{určit znaménko} \end{matrix}$$

Můžeme přesunout a_{ij} na pozici $(1,1)$, to mění znaménko $(i+j-2)$ -krát.

$$C_{ij} = \frac{(-1)^{i+j-2}}{a_{ij}} \cdot \det \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}.$$

Věta: Pro i-tý řádek libovolné matice A platí:

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + \dots + a_{in} C_{in},$$

$$\text{kde } C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}). \quad \leftarrow \text{Vznikne z A vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.}$$

Výhodné, když i-tý řádek obsahuje hodně nul.

Adjugovaná matice a Cramerovo pravidlo

Značí se $\text{Adj}(A)$, platí $(\text{Adj}(A))_{i,j} = C_{j,i}$.

$$\underline{\text{Věta: }} A \cdot \text{Adj}(A) = \det(A) \cdot I_n, \text{ nebo } A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}.$$

Důkaz: Nejprve se zaměřme na diagonálou:

$$(A \cdot \text{Adj}(A))_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot C_{i,k} = \det(A) \quad \underline{\text{podle rozvoje.}}$$

Mimo diagonálu:

$$(A \cdot \text{Adj}(A))_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot C_{j,k} = \det(B) \quad \underline{\text{podle rozvoje,}}$$

kde B vznikne z A nahrazením i-tého řádku j-tým, tedy $\det(B) = 0$. □

[34] Determinanty jsou historicky starší než matice, snaha o nálezení formulí pro řešení soustav lineárních rovnic,

$$\begin{pmatrix} a & b & | & e \\ c & d & | & f \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} ca & cb & | & ce \\ ac & ad & | & af \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} ca & cb & | & ce \\ 0 & ad-cb & | & af-ce \end{pmatrix}.$$

✓ předpokládáme regularitu

$$y = \frac{af-ce}{ad-cb} \quad cax = ce - \frac{af-ce}{ad-cb} \cdot cb = \frac{ce(ad-cb) - cb(af-ce)}{ad-cb}.$$

$$x = \frac{acde - bc^2e - acbf + bc^2e}{a^2cd - abc^2} = \frac{ac(de-bf)}{ac(ad-cb)} = \frac{de-bf}{ad-cb}.$$

Tedy řešení jsou podíly dvou determinantů:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} eb \\ fd \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} ae \\ cf \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

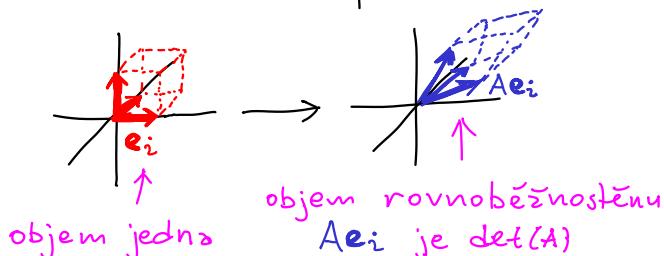
To platí obecně a nazývá se to Cramerovo pravidlo.

$$Ax = b \Rightarrow x = \frac{\text{Adj}(A)b}{\det(A)}, \text{ tedy } x_i = \frac{\sum_{k=1}^n b_k C_{ki}}{\det(A)} = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}. \leftarrow \text{Matice } B_i \text{ vznikne z } A \text{ nahrazením i-tého sloupce pravou stranou } b.$$

Tato formule vedla ke zkoumání pojmu determinant.

Geometrická definice determinantu

Změna objemu při lineární transformaci.

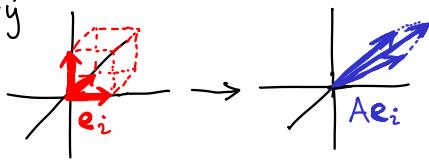


Abychom mohli dokázat ekvivalence s definicí, museli bychom definovat objem a dokázat vlastnosti, což nebude me dělat.

Proč to dává smysl?

- 1) $\det(I_n) = 1$, identita nemění objem.
- 2) Vynásobení řádku konstantou c natohle rovnoběžnostěn v jedné dimenzi, proto mění objem c -krát. Vynásobení sloupce natohle jeden vektor Ae_i , tedy zase mění c -krát.

3) $\det(A)$ je nenulový, právě když je A regulární. Singulární [35] matice s plácennou krychli, takže má nulový objem. Obraz Ae_i regulární matice má nenulový objem.



4) Přičtení jednoho sloupce k druhému kosí jeden vektor Ae_i ve směru jiného vektoru Ae_j , což nemění objem. Přičtení jednoho řádku k druhému zase kosí jednu dimenzi do druhé, opět nemění objem.

5) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ znamená, že při složení se změna objemu násobí.

6) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, neboť inverze ruší změnu objemu A .

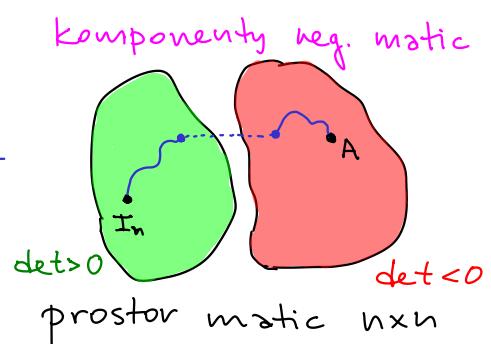
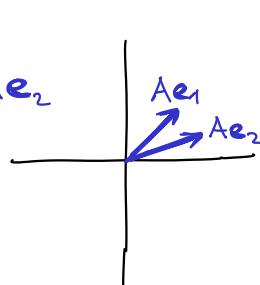
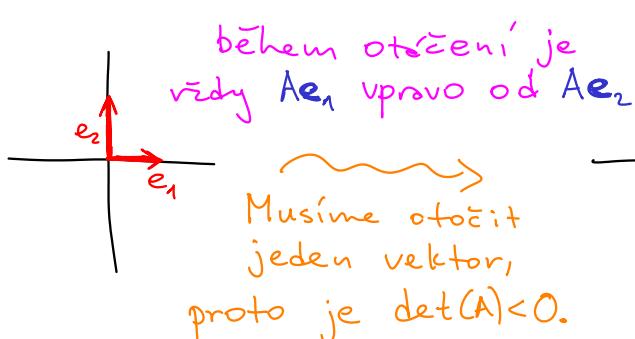
7) $\det(Q) = \pm 1$ pro ortogonální matici, neboť rotace a reflexe nemění objem.

Co ale znamená známénko pro objem?

Popisuje změnu orientace os, ve 3D levotočivé versus pravotočivé. Formálně lze definovat následovně:

Chceme spojitě transformovat e_1, \dots, e_n na Ae_1, \dots, Ae_n , aby se zachovala regularita v libovolný moment.

To ne vždycky jde, proto je dodatečná operace vynásobení vektoru (-1) , které ale mění známénko det.

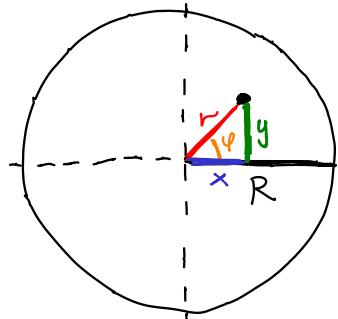


Aby to byla korektní definice, musíme dokázat, že na libovolné cestě z In do A je stejná parita počtu otření vektorů. Speciálně prohorení dvou řádků lze vrótit jedním otřením, tedy mění známénko.

36 Aplikace determinantu v analýze

Věta o substituci jednorozměrného integrálu obsahuje derivaci vnitřní funkce. Proč?

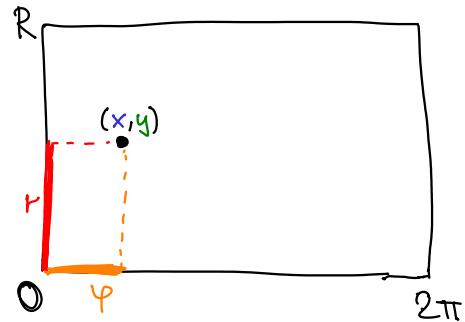
Mnohem názornější pro vícerozměrný integrál, chceme spočítat obsah kruhu o poloměru R :



Substituce do polárních souřadnic.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

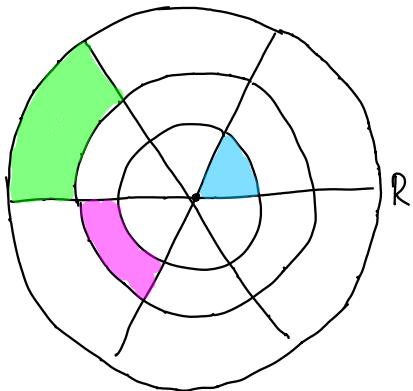


$$\iint 1 \, dx \, dy$$

$$x^2 + y^2 \leq R$$

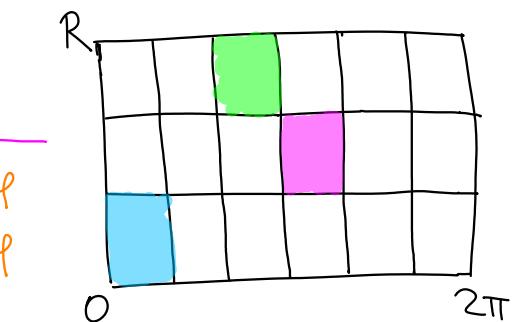
Toto bylo spočítat, ale dělat nechceme.

Integrujeme obdélník tak, že ho nasekáme na malé obdélníky, podívajme se na jejich vzory.



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



Stačí spočítat obsah obdélníka, což je $2\pi R$.

Ok, ale to je obvod kruhu, ne obsah. Kde jsme udělali chybu?

Vzory blíž středu mají menší obsah. Při integrování musíme vážit obdélníky lokální změnou obsahu substituce.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$$\iint \det(J) \, dr \, d\varphi = \text{obsah kruhu}$$

$$\iint r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \, d\varphi = \pi R^2.$$

Úvod do diferenciálních rovnic a vlastních čísel

Udělejme malou odbočku do světa analyžy, který úzce souvisí s lineární algebrou: řešení řady problémů analyž vedlo k rozvoji lineární algebry.

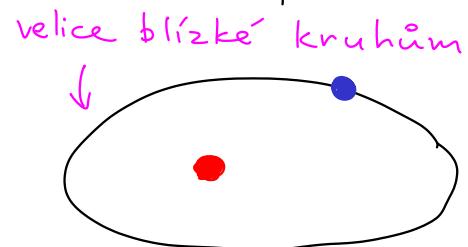
~1600 Galileo Galilei

Při volném pádu se poloha mění kvadraticky.

~1670 Isaac Newton

Fyzika na Zemi a fyzika na nebi byla odlišná (včetně vypadající zásadně odlišné). Planety mají dráhy podobné kruhům, což úplně nesedělo na pozorování.

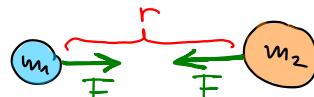
Přesnější pozorování vedlo k modelu pohybu po elipsách, kde jsou planety v ohnisku.



Newton spojil tyto dvě fyziky svojí mechanikou:

- Objekty mají pozice, rychlosti, působí na sebe silami.
- Dostávame dynamický systém, Newtonovy zákony jsou jeho lokální změny.

Univerzální gravitace: $F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$.



Lokální změny vedou globálně k eliptickým orbitám.

Pro to musel Newton vymyslet analýzu, aby mohl složit lokální změny v globální choráni systému.

Poincaré – snaha o hledání kvalitativních řešení, místo vronečku, který neexistuje pro složité systémy. Kvalitativní řešení popisuje chorání pro $t \rightarrow \infty$:

konvergencie, oscilace, equilibria.



38] Geometrizace diferenciálních rovnic:

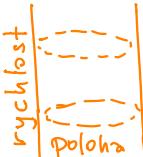
stavový prostor - prostor všech možných stavů dynamického systému.

Systém má proměnné & parametry.

proměnné
mění se v čase

parametry
neměnné, ale ovlivňují systém

stavový prostor
nachodí se v prostorech proměnných

| Příklady: | proměnné | parametry | stavový prostor |
|--------------------|----------------------------------|--------------------|---|
| kružnice | úhlová poloha úhlová rychlosť | délka hmotnost |  nekonečný výklenek (povrch) |
| problém 2 těles | polohy rychlosti | hmotnosti těles | \mathbb{R}^{12} $\begin{cases} \text{polohy} \\ \text{rychlosti} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \times 2 \\ 3 \times 2 \end{array} \right. \quad 3D$ |
| problém 3 těles | polohy rychlosti | hmotnosti těles | \mathbb{R}^{18} $\begin{cases} \text{polohy} \\ \text{rychlosti} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \times 3 \\ 3 \times 3 \end{array} \right. \quad 3D$ |

Determinismus z daného stavu je jednoznačně určena budoucnost a minulost systému.

Pro diferenciální rovnice platí, pokud jsou derivace male.

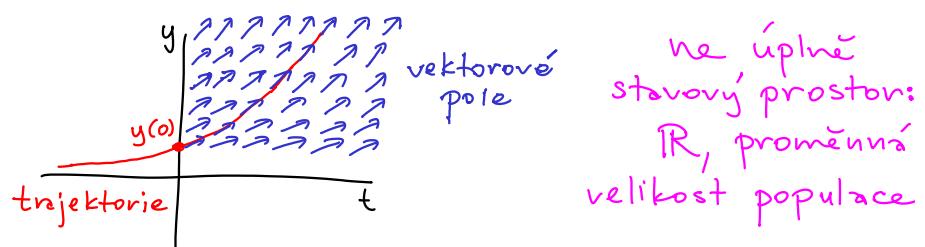
odpovídá trajektorii ve stavovém prostoru

Pro diferenciální rovnice máme vektorové pole, které je tečné k trajektorii v každém bodě.

Populační model

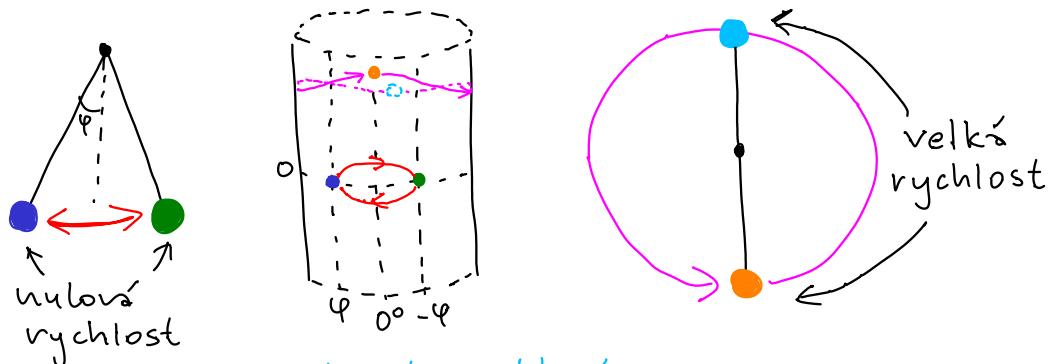
$$\frac{dy}{dt} = r \cdot y$$

reprodukční faktor (parametr)



Rešení: $y = c \cdot e^{rt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = c r e^{rt} = r y$.

Kyvadlo: Dva příklady trajektorií ve stavovém prostoru. [39]



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0.$$

gravitační zrychlení
délka kyvadla

θ ... úhel v čase

Teorie chaosu: Existují velice jednoduché systémy s velice komplikovaným chováním. Platí, že dva libovolně blízké počáteční stavy mají zcela odlišnou budoucnost, amplifikují se rozdíly.

Příklady: Dvojkyvadlo, Lorenzova rovnice.

Klíčové: Lineární systémy diferenciálních rovnic lze řešit pomocí lineární algebry, nelineární systémy jsou typicky nerešitelné.

Vlastní čísla

Uvažme soustavu lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 4v - 5w \\ \frac{dw}{dt} &= 2v - 3w \end{aligned} \quad ; \quad \text{v řecí matici } \frac{du}{dt} = A \cdot u, \text{ kde } u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$

Derivace jsou lineární kombinace hledaných funkcí $v(t)$ a $w(t)$.

40) Co když existovalo řešení

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} \text{ pro nějaké } \lambda \in \mathbb{R}?$$

obdoba populacního modelu

můžeme vykřítit $e^{\lambda t}$

$$A \cdot \mathbf{u} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{u}}{dt},$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ tedy } A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
vlastní vektor

vlastní číslo

Stačí tedy najít vlastní čísla a vektory matice A.

Def.: Označme $\text{Sp}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \}$. ← spektrum matice

① Když $\lambda = 0$, získáme rovnici $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$.

0 je vlastní číslo A $\Leftrightarrow \text{Ker}(A)$ je netriviální.

② Uvažme matice A a $A + dI$.

Když $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, potom $(A + dI)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + d\mathbf{x} = (\lambda + d)\mathbf{x}$.

Tedy $\text{Sp}(A + dI)$ vznikne z $\text{Sp}(A)$ zvětšením o d.

Dohromady:

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ je singulární}$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$$

charakteristický polynom matice A

$$(-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu.

Pro matici $n \times n$ jich vždy existuje přesně n.

Vrátně se k matici A z motivace:

[41]

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Tedy $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Určeme vlastní vektory pomocí $\text{Ker}(A - \lambda I)$:

$$\begin{pmatrix} 4-2 & -5 & | & 0 \\ 2 & -3-2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & | & 0 \\ 2 & -5 & | & 0 \end{pmatrix}}_{\text{musí být singulární}} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 4+1 & -5 & | & 0 \\ 2 & -3+1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -5 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}}_{\text{musí být singulární}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\mathbf{u} = d \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$, kde d, B jsou konstanty podle počátečních podmínek $\mathbf{u}(0)$.

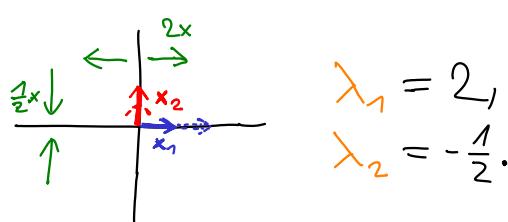
Geometrické příklady na maticích 2×2 :

Pro $\lambda \in \mathbb{R}$, $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$... \mathbf{x} je směr, kde A natahuje,
*pouze pro \mathbb{R} , ale nemění směr vektorů.
v \mathbb{C} komplikované!

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$... identita

kazdý vektor je vlastní vektor,
 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. \mathbb{R}^2

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$... natažení v osách



42) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$... kolmá projekce

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$... zrcadlení

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1,$$

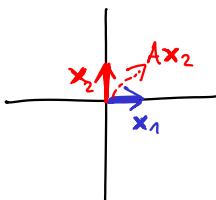
$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$... rotace o 90°

Stabilní směr není, ale existují vl. čísla v \mathbb{C} :

Násobení v \mathbb{C} jsou
rotace a natahování,
 $\langle x_1 \rangle$ a $\langle x_2 \rangle$ jsou komplexní roviny, v nichž se rotuje.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$... zkosení



$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_1 = +i, \quad \lambda_2 = -i,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

algebraická násobnost

$\lambda = 1$ dvojnásobné, ale pouze jeden vlastní vektor $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

geometrická násobnost = 1

Existují degenerované matice, které nemají báze z vlastních vektorů. Jak vidíme, jejich analýza je mnohem složitější.

14.4.2015 – 8. cvičení

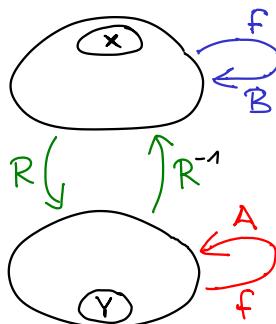
43

Diagonalizace a vlastnosti vlastních čísel

Připomeněme, že dvě matice A a B jsou podobné, pokud reprezentují stejné lineární zobrazení vůči různým bázím.

$$A = R B R^{-1}$$

matice přechodná od báze X k bázi Y



Pouze pro čtvercové matice, reprezentují endomorfismy vůči jedné bázi.

V případě soustavy lineárních diferenciálních rovnic to odpovídá substituci:

$$\frac{du}{dt} = Au \quad u = Rv, \quad \frac{dRv}{dt} = R \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R^{-1}ARv.$$

derivace lineární

Podobné matice mají stejná vlastní čísla:

$$A\underset{\substack{\text{vlastní} \\ \text{vektor A}}}{x} = \lambda x \Rightarrow R B R^{-1} \underset{\substack{\text{vlastní} \\ \text{vektor B}}}{x} = \lambda x$$

$$B\underset{\substack{\text{príslušný} \\ \text{vlastní vektor B}}}{R^{-1}x} = \lambda R^{-1}x$$

Algebraická motivace pro studium vlastních čísel:

Chceme nalézt bázi, v které je matice reprezentující endomorfismus co nejjednodušší.

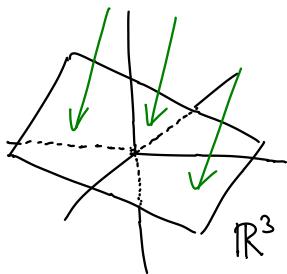
Předpokládejme, že existuje báze tvořená vlastními vektory x_1, \dots, x_n . Nechť A reprezentuje vůči kanonické bázi:

$$S = \begin{pmatrix} | & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & | \end{pmatrix}, \quad AS = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_n x_n \\ | & | \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = S \Lambda S^{-1}$$

diagonalizace

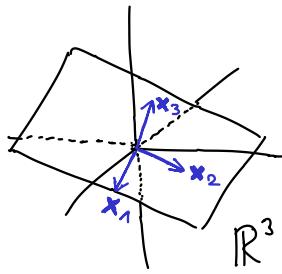
[44] Matice je podobná diagonální matici \Leftrightarrow
existuje báze z vlastních vektorů.

Příklad: Kolmá projekce na rovinu v \mathbb{R}^3 .



v kanonické bázi
složitá matice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$



pro vhodnou
bázi x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma: Pokud $Ax = \lambda x$ a $Ax' = \lambda' x'$ a $\lambda \neq \lambda'$, potom jsou vlastní vektory x a x' lineárně nezávislé.

Důkaz: Nechtě $x = \alpha x'$, potom $\lambda x = Ax = \alpha Ax' = \alpha \lambda' x' = \lambda' x$.
Protože $x \neq 0$, je to spor s $\lambda \neq \lambda'$. \square

Podobně platí pro více vlastních vektorů. Speciálně, pokud jsou vlastní čísla po dvou různá, má každý vlastní vektor, a tyto vektory tvoří bázi \Rightarrow diagonalizace.

Mocniny diagonalizovatelné matice

$$A^k = (S \Lambda S^{-1})^k = \underbrace{S \Lambda S^{-1} S \cdots S^{-1} S \Lambda S^{-1}}_{k\text{-krát}} = S \Lambda^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1}$$

stáčí umocnit
vlastní čísla na diagonále

Lineární diferenční systémy

Diskrétní systém s n proměnnými, mění se v krocích $y_0, y_1, \dots \in \mathbb{R}^n$

$$y_0; \quad y_{k+1} = A y_k. \quad \begin{matrix} \text{nový stav závisí lineárně} \\ \text{na předchozím stavu} \end{matrix}$$

↑
počítací stav

↑
 $n \times n$

Teddy $y_k = A^k y_0.$

Pokud je A diagonalizovatelná, potom lze vyřešit pomocí vlastních čísel:

$$y_k = S \Lambda^k S^{-1} y_0.$$

Existují i obecné rozklady (Jordanova forma $A = S^{-1}JS$).

Jiný popis: Nechť $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je báze vlastních vektorů [45] matice A, s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$\mathbf{y}_0 = \sum \alpha_i \mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{y}_k = A^k \mathbf{y}_0 = A^k \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n A^k \alpha_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Lze modelovat libovolnou lineární rekurenci (úkol)

Fibonacciho čísla: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Systém má 2 proměnné: $\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, platí

$$A \mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{y}_{k+1}.$$

Nalezneme vlastní čísla a vektory A:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(1-\lambda) - 1 = -\lambda^2 + \lambda - 1. \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = -\lambda_2 \quad \text{zlatý zelený} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & -1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{y}_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \mathbf{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \mathbf{x}_2. \quad \text{po substituci: } \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Tedy F_k získáme jako druhou souřadnici \mathbf{y}_k :

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Součet a součin vlastních čísel:

Uvažme charakteristický polynom

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + (-1) \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

Zjevně pro $\lambda = 0$ platí, že $\det(A) = \alpha_0$. Na druhou stranu

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda).$$

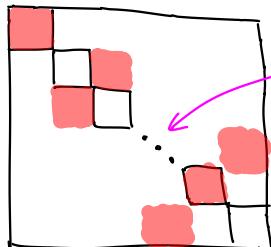
Proto $\alpha_0 = \prod \lambda_i$ a $\det(A)$ je součin vlastních čísel.

[46] Součet vlastních čísel je také důležitý parametr.

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

proto $\alpha_{n-1} = \sum \lambda_i$. V $A - \lambda I$ je λ pouze na diagonále.

Uvažme členy $\det(A - \lambda I)$:



na diagonále
 $a_{i,i} - \lambda$

1) Permutace $G \neq \text{id.}$

Potom G obsahuje nejvýš $n-2$ diagonálních členů, tedy stupeň λ je nejvíše $n-2$.

2) Permutace $G = \text{id.}$

Potom je člen $\det(A - \lambda I)$ roven

$$(a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) \cdots (a_{n,n} - \lambda).$$

Aby bylo λ^{n-1} , musíme vybrat přesně jeden člen $a_{i,i}$, tedy $\alpha_{n-1} = \sum a_{i,i} = \text{tr}(A)$.
stopa matice $A \uparrow$

Tedy $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$.

Lze využít k verifikaci výpočtu a má teoretické důsledky.

Matice A a A^T mají stejná vlastní čísla:

$$\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I).$$

21.4.2015 - 9. cvičení

47

Gershgorinova věta a analýza matic grafů

Nejprve ukažme odhad na vlastní čísla obecné matice:

Gershgorinova věta: Nechť A je matice.

Uvažme disky D_i v komplexní rovině:

střed D_i je a_{ii} , poloměr $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Potom každé vlastní číslo $\lambda \in \cup D_i$.

Důkaz: Pokud $\lambda \in \text{Sp}(A)$, existuje vlastní vektor x .

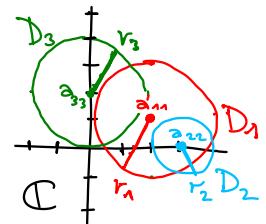
Nechť x_i je v absolutní hodnotě největší složka, uvažme vlastní vektor $y = \frac{x}{x_i}$. Platí, že $|y_j| \leq 1$, $y_i = 1$.

$$\lambda = (Ay)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = (a_{ii}) + \left(\sum_{j \neq i} a_{ij} y_j \right) \quad \begin{array}{l} \text{nejvýše se} \\ \text{vzdáleně } r_i \\ \text{rotuje a možná} \\ \text{zkrátí } a_{ij} \end{array}$$

střed disku D_i

Proto $\lambda \in D_i$.

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 1-i & & \\ 1 & 3 & 0 & \\ & 1 & -1 & 2i \end{pmatrix}$$



Topologická varianta:

Uvažme komponenty disků D_i v rovině.

V každé komponentě je tolik vlastních čísel, kolik obsahuje disků.

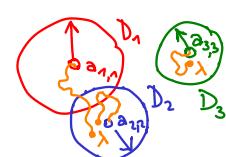
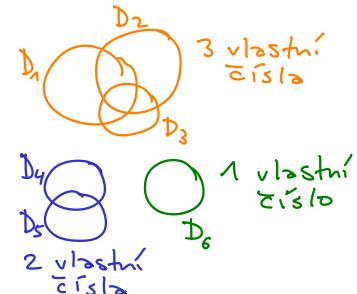
Důkaz: Potřebujeme dva fakty:

- 1) Vlastní čísla jsou spojité v koeficientech matice, neboť to jsou kořeny polynomu v koeficientech matice.
- 2) Vlastní čísla diagonální matice jsou koeficienty na diagonále. (Platí i pro trojúhelníkové matice.)

Nechť D je diagonální část A , uvažme spojitou transformaci

$$A(t) = tA + (1-t)D, \quad t \in [0, 1], \quad A(0) = D, \quad A(1) = A.$$

Každé vlastní číslo se spojite posune z a_{ii} do λ , nemůže změnit komponentu disků.



□

[48] Důkaz, že všechna vlastní čísla reálné matice jsou reálná:

Nechť $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, vynásobme zleva \mathbf{x}^T :

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \text{ nebož } \lambda = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}.$$

To je podíl dvou reálných čísel, proto $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Toto nedává smysl, třeba rotace o 90° má komplexní vlastní čísla. Důkaz je špatně!

Problém je, že \mathbf{x} může mít komplexní koeficienty. Lze však opravit pro symetrické matice.

Protože pracujeme v \mathbb{C} , budeme pracovat s jinou definicí skalárního součinu a normy:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mathbf{x}_i}_{\substack{\text{komplexní} \\ \text{schrúzení}}} \overline{y_i} \quad \| \mathbf{x} \| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}_1 \overline{x_1} + \dots + \mathbf{x}_n \overline{x_n}}.$$

Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definujme komplexní (Hermitovskou) transpozici $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (někdy značená A^H):

$$(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$$

Matrice A je symetrická, pokud $A = A^*$. ← nutně reálná diagonála

Plati, že $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$ a $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}$.

Věta: Symetrická matice $A = A^*$ má všechna vlastní čísla reálná.

Důkaz: Stejně jako předtím vynásobme $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ zleva \mathbf{x}^* :

$$\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x}, \text{ nebož } \lambda = \frac{\mathbf{x}^* A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}.$$

Jmenovatek je $\| \mathbf{x} \|^2$, což je podle definice reálné číslo.

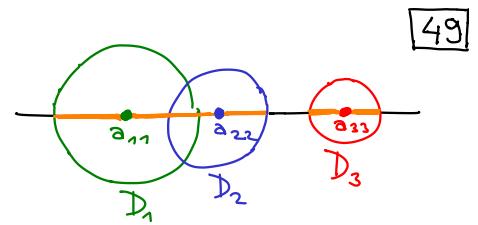
Citatel je $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} \in \mathbb{C}$, uvažme jeho transpozici:

$$(\mathbf{x}^* A \mathbf{x})^* = \mathbf{x}^* A^* (\mathbf{x}^*)^* = \mathbf{x}^* A^* \mathbf{x} = \mathbf{x}^* A \mathbf{x}. \quad \text{symetrie } A$$

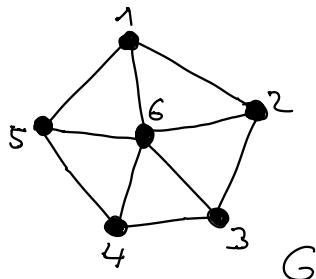
Proto $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} \in \mathbb{R}$, a tedy $\lambda \in \mathbb{R}$.

tentokrát už správně
⇒ □

Pro symetrické matice leží středy všech disků D_i z Gershgorinovy věty v \mathbb{R} , proto $\lambda \in \cup D_i \cap \mathbb{R} = \cup [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i]$.



Matice grafů: aplikujme vlastní čísla



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

matice sousednosti

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 3 | -1 | | | -1 | -1 |
| -1 | 3 | -1 | | | -1 |
| | -1 | 3 | -1 | | -1 |
| | | -1 | 3 | -1 | -1 |
| -1 | | -1 | 3 | -1 | |
| -1 | -1 | -1 | -1 | 3 | -1 |

Laplaceova matice

$$(A_G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & ij \in E, \\ 0 & ij \notin E, \end{cases} \quad (L_G)_{i,j} = \begin{cases} \deg(i) & i=j, \\ -1 & ij \in E, \\ 0 & ij \notin E. \end{cases}$$

stupeň vrcholu i

Z pohledu „matice = tabulka čísel“ je L_G redundantní. Avšak jsou to jiná lineární zobrazení, proto jejich analýza odhalí jiné vlastnosti G .

Nechť \mathbf{x} je vektor ohodnocení vrcholů grafu.

Uvažme $A_G \mathbf{x}$ a $L_G \mathbf{x}$:

$$(A_G \mathbf{x})_i = \sum_{j \in E} x_j \quad (L_G \mathbf{x})_i = \deg(i) \cdot x_i - \sum_{j \in E} x_j.$$

sčítáme ohodnocení
sousedů

↑
deg(i)-krát hodnota x_i minus
průměr hodnot sousedů

Laplaceova matice grafu:

Diskretizace Laplaceova operátora Δ , důležitý pro fyziku a diferenciální rovnice.

divergence ↓ gradientu ↓

$$\text{Ve 3D: } \Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla f(x, y, z).$$

O kolik se liší hodnota $f(x, y, z)$ od průměru na okolí.

50 Například rovnice tepla ve 3D:

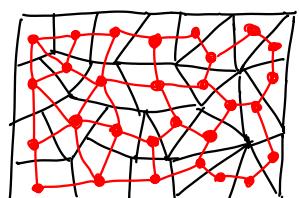
$h(x,y,z,t)$ teplota v bodě (x,y,z) v čase t .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta h.$$

Bod mění svoji teplotu tím rychleji, čím je jeho teplota více odlišná od průměru okolí.

Například Laplaceova rovnice $\Delta h=0$ hledá teplotní equilibrium s předepsanými okrajovými podmínkami.

L_G je diskretizace Δ :



difuze po hraničích

Pro male' kousky prostoru
předpokládáme konstantní
teplotu.

$L_G h$ je rozdíl teploty kusu h_i
a průměru jeho sousedů.

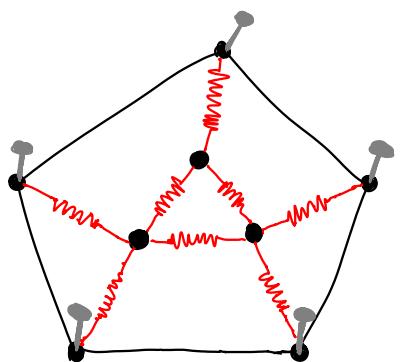
max. stupeň

Podle Gershgorinovy věty je $\text{Sp}(L_G) \subseteq [0; 2\Delta(G)]$.

Aplikace: Spektrální kreslení grafů

Laplaceovy matice lze využít ke kreslení grafů.

Tutty (1963): Mějme 3-souvislý rovinný graf. Zvolme konvexní nakreslení vnější stěny. Pokud umístíme ostatní vrcholy do těžiště sousedů a nakreslíme hrany rovnými čárami, získáme rovinné nakreslení.



Nechtě x a y jsou vektory pozic vrcholů.

Fyzikální interpretace:

Vrcholy vnější stěny přišpendlime, ostatní hrany nahradíme pružinami.

Systém minimalizuje potenciální energii

$$x^* L_G x + y^* L_G y = \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2.$$

To umístí vnitřní vrcholy do těžiště jejich sousedů.

Vyřešme pouze souřadnice x , pro y obdobně. [51]

Předpokládejme, že vrcholy $1, \dots, k$ jsou přišpendleny.

Tedy x_1, \dots, x_k jsou předepsány a pro $i > k$ má platit $(L_G x)_i = 0$.

Vyškrtnutím prvních k řádků a dosazením x_1, \dots, x_k získáme

$\xrightarrow{(n-k) \times (n-k)} L'_G x' = b$, Tutté dokázal, že L'_G je regulární

a že získáme rovinné nakreslení.

Hallovo spektrální nakreslení:

Nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n = 0$ jsou vlastní čísla L_G ,
pro souvislý graf

a nechť u_1, \dots, u_n jsou příslušné vlastní vektory.

Obecný graf lze nakreslit umístěním vrcholů na (u_{n-1}, u_{n-2})

a nakreslením hran rovinnými čárami.

Proč to dává smysl?

$L_G u_{n-1} = \lambda_{n-1} u_{n-1}$ } Pokud jsou $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}$ malé, je pravá
 $L_G u_{n-2} = \lambda_{n-2} u_{n-2}$ } strana blízká 0, tedy většina
vrcholů je blízko téžitě sousedů.

Matice sousednosti grafu:

Uvažme $A_G^k e_i$, mocniny propagují jedničku v grafu.

$(A_G^k e_i)_j = (A_G^k)_{ij}$ je počet sledů mezi i a j délky k .

Například můžeme určit centrum grafu jako vrcholy,

co maximizuje diagonálu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_G^k}{(k!)} = e^{A_G}$. ← V centru
dělme, aby to jsou vrcholy,
nebylo moc velké co mají nejvíce sledů $i \rightarrow i$.

Lze využít k modelování náhodných procházkek.

Pravděpodobnost je určena k modelování složitého reálného světa. Například hod kostky neumíme předpovědět, ale lze udělat model: $1/6$ na každou hodnotu. Prozradí statistické chování kostky.

52 Náhodná procházka popisuje pohyb částice.
Nechť P_G vznikne z A_G vyčleněním každého sloupu pomocí $\text{deg}(i)$.

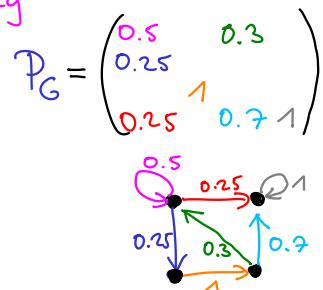
Pravděpodobnostní distribuce: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1$.

Systém lineárních diferencí:

\mathbf{x}_0 ... počáteční distribuce,
třeba e_i ,

$$\mathbf{x}_k = \underbrace{P_G}_{\text{krok náhodné procházky}} \mathbf{x}_{k-1} = P_G^k \mathbf{x}_0.$$

Místo grafu můžeme uvažovat i obecný Markovský proces P_G , což je nezáporná matice se součty 1 ve všech sloupcích.



Předpokládejme, že existuje báze z vlastních vektorů $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, že $\mathbf{x}_0 = \sum \alpha_i \mathbf{y}_i$.
Již víme, že $\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \mathbf{y}_i$.

Chceme analyzovat $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} P_G^k \mathbf{x}_0$. Podle Gershgorinovy věty (aplikované na P_G^T) víme, že $|\lambda_i| \leq 1$, a vždycky existuje \mathbf{y}_1 , že $\lambda_1 = 1$. Pro jednoduchost se zaměříme na d-regulární grafy, potom $P_G = \frac{1}{d} A_G$ je symetrická. Tedy $\lambda_i \in [-1; 1]$ a nechť $1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ a $\mathbf{y}_1 = \mathbf{1}$.

vektor jedniček

Obecná konvergence $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{z}$ záleží na spektrálním radiu $\rho(A) = \max |\lambda_i|$.

- $\rho(A) < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{z} = 0$
- $\rho(A) = 1 \Rightarrow$ složité chování (konvergence, oscilace)
- $\rho(A) > 1 \Rightarrow$ divergence

v sumě $\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \mathbf{y}_i$ převládne první člen

Pokud $\lambda_2 < 1, \lambda_n > -1$ (když je G souvislý nebipartitní), potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_G^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_1.$$

28.4.2015 - 10. cvičení

[53]

Schurův a spektrální rozklad matice

Připomeneme algebraickou motivaci:

Podobnost: stejné lineární zobrazení vůči různým bázím,

$$A = SBS^{-1} \quad \leftarrow \text{chceme mít co nejjednodušší matici } B$$

Víme, že B může být diagonální právě když existuje báze S z vlastních vektorů.

① Jaký je nejjjednodušší tvar, když báze neexistuje? príště

• Jordanova normální forma $A = SJJS^{-1}$

• Schurův rozklad $A = Q \triangle Q^*$.

↑
ortogonální báze ◻ horní
(unitární) trojúhelníková

② Co když chceme extra podmínky? Třeba aby byla báze ortogonální. Kdy existuje?

• Uvedený Schurův rozklad existuje vždy.

• Spektrální rozklad $A = Q \triangle Q^*$ existuje, právě když A je normální: $A^*A = AA^*$.

◻ diagonální

Schurův rozklad

Věta: Pro libovolnou matici A existuje Schurův rozklad

$$A = Q \triangle Q^*$$

Důkaz: Chceme $AQ = QU$.

Nechť $Q = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & | \end{bmatrix}$. ↑ diagonálna
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Budeme Q budovat postupně indukcí podle velikosti A .

[54] Má platit, že

$$Aq_i = \lambda_i q_i + \sum_{j < i} u_{j,i} q_j.$$

Speciálně q_1 má být vlastní vektor A . Protože ten vždy existuje, zvolme jako q_1 libovolný vlastní vektor normy jedna.

Jak dál? Nemusí existovat vlastní vektor q_2 nezávislý na q_1 , navíc chceme kolmost.

Zatím ignorujme a doplňme na libovolnou ortogonální bázi.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \\ ? \end{pmatrix}$$

$\uparrow Q_1$

$$\begin{pmatrix} x_1 & ? \\ 1 & \hat{U}_1 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$\uparrow U_1$

Nejsou nuly, ale to je v pořadí.
Musíme se zbavit nul pod diagonálou.

Nulové koeficienty z ortogonality:

$$q_i^* A q_1 = \lambda_1 q_i^* q_1 = 0.$$

Protože \hat{U}_1 je menší matici $(n-1) \times (n-1)$, můžeme aplikovat indukční předpoklad a víme: násobení blokových matic, rozmyslete si

$$\hat{U}_1 = \hat{Q}_2 \hat{U} \hat{Q}_2^*,$$

Schurův rozklad

neboli

$$\begin{pmatrix} x_1 & ? \\ 1 & \hat{U}_1 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -o- \\ 1 & \hat{Q}_2 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -o- \\ 1 & \hat{Q}_2 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -o- \\ 1 & \hat{Q}_2 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 & ? \\ 1 & \hat{Q}_2 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix} = \hat{U}.$$

$\uparrow Q_2$ $\uparrow Q_2$ $\uparrow U$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -o- \\ 1 & \hat{Q}_2 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -o- \\ 1 & \hat{Q}_2 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -o- \\ 1 & \hat{Q}_2 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 & ? \\ 1 & \hat{Q}_2 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix},$$

tedy $Q = Q_1 Q_2$ a $A = Q U Q^*$.

□

Geometrická interpretace

Každé lineární zobrazení lze rozložit na natahování, rotaci ($\lambda_i \notin \mathbb{R}$) a kosení $x_i \mapsto x_i + x_j$, kde $j < i$.

Normalita.

55

Matice A je normální, pokud $A^*A = AA^*$. Definice vypadá zvláštně, ale je to hluboká geometrická vlastnost. Matice komutuje s transpozicí (duálním zobrazením).

Nechť r_1, \dots, r_n jsou řádky A a s_1, \dots, s_n sloupce A .

Potom z normality platí:

$$(A^*A)_{i,j} = s_i^* s_j = r_i^* r_j = (AA^*)_{i,j}, \text{ speciálně } \|r_i\| = \|s_i\|.$$

Normální matice mají stejné úhly a délky u řádkových a sloupcových vektorů

Spektrální rozklad

Věta: Pro matici A existuje spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^*$$

právě když A je normální.

Důkaz: " \Rightarrow ": Pokud $A = Q \Lambda Q^*$, potom $A^* = Q \Lambda^* Q^*$.

$$\begin{aligned} A^*A &= Q \Lambda^* Q^* Q \Lambda Q^* = Q \underbrace{\Lambda^* \Lambda}_{\text{komutuje}} Q^* = Q \Lambda \Lambda^* Q^* = \\ &= Q \Lambda Q^* Q \Lambda^* Q^* = AA^*. \end{aligned}$$

" \Leftarrow ": Uvažme Schurův rozklad $A = Q U Q^*$. Tvrdíme, že U je diagonální matice Λ .

$$A^* = Q \underbrace{U^*}_{\text{↑}} Q^*.$$

■, není to Schurův rozklad

Dokážeme ve dvou krocích:

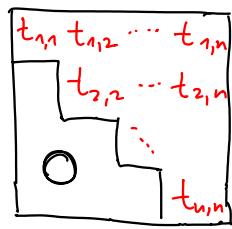
① U je normální.

$$\left. \begin{array}{l} U = Q^* A Q, \\ U^* = Q^* A^* Q. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zbytek důkazu} \\ \text{jako výše, vynásobení} \\ \text{a normalita } A \end{array}$$

[56] ② Pokud je trojúhelníková matice T normální, potom je diagonální.

Vzpomeňme si, že $\|r_i\| = \|s_i\|$. Speciálně

$$\sqrt{t_{1,1}^2 + t_{1,2}^2 + \dots + t_{1,n}^2} = \|s_1\| = \|r_1\| = \sqrt{t_{1,1}^2 + t_{1,2}^2 + \dots + t_{1,n}^2},$$



tedy $t_{1,2}, \dots, t_{1,n} = 0$. Podobně další řádky a sloupce.

Tedy Schurův rozklad je spektrální $\Rightarrow A = Q \Lambda Q^*$. \square

Proč chceme najít ortogonální báze q_1, \dots, q_n z vlastních vektorů?

① Jednoduché vyjádření souřadnic $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i$ pomocí $\alpha = Q^* x$.

② Lokální změna x uměrně změně souřadnice α .
Z toho plynou dobré numerické vlastnosti rozkladů.
Například Schurův rozklad je spojitý v koeficientech matice A .

5.5.2015 - 11. cvičení

57

Nenormální matice a Jordanova normální forma

Dokážeme, že libovolnou matici lze skoro diagonalizovat.

Jordanova normální forma.

Blokově diagonální matice J .

Každý blok je Jordanova buňka

$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$ nějaké velikosti $k \times k$.

$$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & & & \\ & J_{\lambda_2} & & & \\ & & J_{\lambda_3} & & \\ & & & J_{\lambda_4} & \\ & & & & J_{\lambda_5} \\ & & & & & J_{\lambda_6} \end{bmatrix}$$

Věta: Pro libovolnou matici existuje Jordanova forma

$$A = SJS^{-1}.$$

Sloupce matice S obsahují zobecněné vlastní vektory x_1, \dots, x_n . Označme vlastní čísla na diagonále $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Z $AS = SJ$ vyplývá, že

$$A x_i = \begin{cases} \lambda_i x_i, & \text{pokud } x_i \text{ je vlastní vektor} \\ \lambda_i x_i + x_{i-1} & \text{jinak. } \end{cases}$$

x_i je vlastní vektor
 x_i je zobecněný vlastní vektor
↳ tvoří řetízky navěšené na vlastní vektory

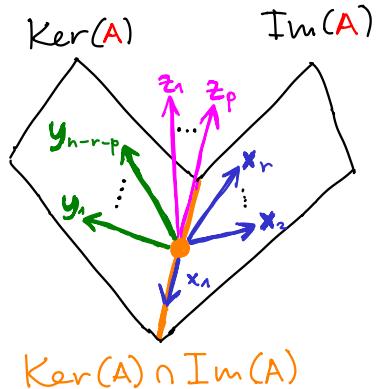
Rozklad popisuje A vůči jiné bázi jako kombinaci natahování a rotací (vlastní vektory) a kosení (zobecněné vlastní vektory).

Důkaz: Budeme nejprve předpokládat, že A je singulární. Označme

$$\dim \text{Im}(A) = r < n, \quad \dim \text{Ker}(A) = n - r > 0,$$

$$\dim \text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A) = p.$$

[58]



① Im(A) je invariantní podprostor matice A : $\forall \mathbf{x} \in \text{Im}(A) \quad A\mathbf{x} \in \text{Im}(A)$

Proto $B = A \cap \text{Im}(A)$ je lineární zobrazení $\text{Im}(A) \rightarrow \text{Im}(A)$, které je reprezentováno maticí $r \times r$.

Z indukčního předpokladu existuje Jordanova forma B s bází $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \in \text{Im}(A)$ ze zobecněných vlastních vektorů B (také A). Tedy $A\mathbf{x}_i = \begin{cases} \lambda_i \mathbf{x}_i, \\ \lambda_i \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1}. \end{cases}$ nebo Musíme je doplnit na bázi \mathbb{C}^n .

② Každý vektor z $\text{Ker}(A)$ je vlastní vektor A .

Zvolme z libovolné báze $\text{Ker}(A)$ vektory y_1, \dots, y_{n-r-p} neležící v $\text{Im}(A)$, určitě lineárně nezávislé s $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$.

③ Chybí nalezt p dalších zobecněných vlastních vektorů, bohužel je nelze zvolit z $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$ kvůli nezávislosti s $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$. Musíme konečně něco udělat.

Platí, že p vektorů z $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ leží v $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$.

Proč? Obecně, pokud $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = k$, libovolná báze zobecněných vlastních vektorů obsahuje k vlastních vektorů z $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Můžeme toto přidat jako indukční předpoklad, konstrukce y_i to zachová. Platí, že $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$.

Pokud výše uvedený postup aplikujeme na B , obsahuje vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ bázi $\text{Ker}(B)$.

Tedy mezi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ nalezneme p řetízků začínajících v $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$, odpovídající buňkám J_0 . Nechť \mathbf{x}_j je poslední vektor i -tého z těchto řetízků. Protože $\mathbf{x}_j \in \text{Im}(A)$, zvolme \mathbf{z}_i jako jeho libovolný vzor: $A\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_j$.

Volbou z_1, \dots, z_p jsme jednotlivé řetízky prodloužili [59] o jedno, tedy tato část důkazu vytváří netriviální Jordanovy buňky.

Zjevně $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r-p}, z_1, \dots, z_p$ jsou zobecněné vlastní vektory.

Zbývá dokázat jejich nezávislost:

$$0 = \sum_{i \in \text{Im}(A)} \alpha_i x_i + \sum_{i \in \text{Ker}(A)} \beta_i y_i + \sum_{i \in \mathbb{C}^n} \gamma_i z_i. \quad \begin{array}{l} \text{výnosobne A zleva} \\ \text{(neekvivalentní úprava)} \end{array}$$

$$0 = \sum \alpha_i A x_i + \sum \beta_i A y_i + \sum \gamma_i A z_i =$$

$$= \sum \alpha_i \begin{cases} \lambda_i x_i \\ \lambda_i x_i + x_{i-1} \end{cases} + 0 + \sum \gamma_i x_j. \quad \begin{array}{l} \text{Tyto vektory } x_j \text{ se} \\ \text{nikde neobjevují v levé} \\ \text{sumě, protože} \\ \text{řetízku } J_0 \\ \text{přes konec} \\ \text{řetízku } J_0 \end{array}$$

$$A x_j = \begin{cases} 0, & \text{nebo} \\ x_{j-1}. & \text{nebo} \end{cases}$$

Protože x_1, \dots, x_r jsou lineárně nezávislé, jsou $\gamma_i = 0$. To ale ještě nevíme o α_i , protože některé x_i se objevují vlevo i vpravo. Obrazy $A x_i$ mohou být závislé.

Vratíme se zpět:

$$0 = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_i y_i + \sum 0 z_i = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_i y_i.$$

Avšak y_i jsme volili tak, aby byly nezávislé s x_i .

Proto $\alpha_i = 0 \Rightarrow \beta_i = 0$.

Co když je A regulární?

Pro každou matici existuje vlastní číslo λ , pro které je $A - \lambda I$ singulární. Pro ní podle důkazu existuje Jordanova normální forma: vytváří netriviální buňky J_λ .

$$A - \lambda I = SJS^{-1} \Rightarrow S(J + \lambda I)S^{-1} = A - \lambda I + \lambda I = A.$$

Tedy $S(J + \lambda I)S^{-1}$ je Jordanova normální forma A. \square

60 Poznámky k větě:

- Pokud důkaz aplikujeme na symetrickou matici $A = A^*$, je $\text{Im}(A) = \mathcal{Q}^*(A)$, což je to ortogonální doplněk $\text{Ker}(A)$. Tedy $p=0$ a řetízky se neprodlužují. Stačí dokázat, že $B = A \cap \text{Im}(A)$ je symetrická matici:

B^* je jediná matice, že $\langle Bx | y \rangle = \langle x | B^*y \rangle$, $\forall x, y \in \text{Im}(A)$.

↑ symetrie se přenese z A

Proto $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}$ tvoří bázi z vlastních vektorů, která je snadno ortogonální. To je spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^*$$

- V důkazu vůbec nepotřebujeme determinant, stačí existence jednoho vlastního čísla na konci důkazu.

Nechť λ_i je vlastní číslo:

→ geometrická násobnost d_i : $\dim \text{Ker}(A - \lambda_i I)$, což je počet nezávislých vlastních vektorů. Také je to počet Jordanových buněk J_{λ_i} .

→ algebraická násobnost β_i : součet velikostí J_{λ_i} , dimenze podprostoru generovaného z obecně nými vlastními vektorů čísla λ_i .

Plati' $d_i \leq \beta_i$ a $\beta_1 + \dots + \beta_k = n$.

↑ protože z obecně vlastní vektorů tvoří bázi

Determinant tedy vůbec nepotřebujeme pro vlastní čísla, lze budovat teorii bez něj. Můžeme definovat $\det(A) = \prod \lambda_i^{\beta_i}$.

- Minimální polynom $M_A(x) = \prod(x - \lambda_i)$. [61]
Charakteristický polynom $P_A(x) = \prod(x - \lambda_i)$. β_i velikost
největší
buněky $J\lambda_i$,
 $r_i \leq \beta_i$.

M_A je polynom $x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \dots + a_0$ nejmenšího stupně
 l , že platí $M_A(A) = 0$. M_A je důležitý strukturálně.
Platí, že pokud $P(A) = 0$, potom M_A dělí polynom P .

Hierarchie matic podle vlastních čísel

Srovnajme matice podle toho, jak je umíme pochopit
z vlastních čísel.

| matice | vlastní čísla | víme o nich |
|--------------------------------------|---|--|
| symetrické pozitivně definitní | $\lambda_i \geq 0$ | Další specifické vlastnosti, <u>více později</u> . |
| symetrické $A = A^*$ | $\lambda_i \in \mathbb{R}$ | <u>Stačí pouze natahování</u> , <u>žádne' rotace</u> . |
| normální $A^*A = AA^*$ | spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^*$ | Vlastní čísla <u>poví</u> o matici <u>strukturálně</u> <u>vše</u> , stačí $Sp(A)$. |
| nenormální $A^*A \neq AA^*$ | Jordanova forma $A = SJS^{-1}$ | Vlastní čísla neřekou moc i pro diagonalizaci, musíme znát úhly mezi vlastními vektory. |

Jak analyzovat nenormální matice?

Moc se to neumí, dnes aktivní výzkum.

Dvě zábeznění $Sp(A)$:

pseudospektrum \rightsquigarrow numericky' rozsah.

62 Numerický rozsah:

Pokud $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, potom $\frac{\mathbf{x}^* A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \lambda$.

$$\frac{\mathbf{x}^* A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \lambda.$$

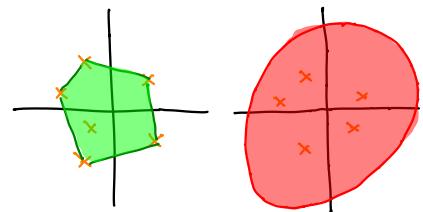
Rayleyho kvocient

Toto lze použít k definici numerického rozsahu:

$$W(A) = \left\{ \frac{\mathbf{x}^* A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} : \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \right\} = \{ \mathbf{x}^* A \mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|=1 \} \subseteq \mathbb{C}.$$

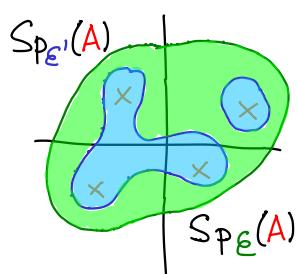
$W(A)$ je vždy konvexní a obsahuje vlastní čísla.

Pro normální matici je to konvexní obal vlastních čísel, pro nenormální matice je větší.



Pseudospektrum:

$$Sp_{\epsilon}(A) = \{ \lambda : \lambda \text{ je vlastní číslo } A+E, \|E\| \leq \epsilon \}.$$



$$0 < \epsilon' < \epsilon$$

$$Sp_{\epsilon'}(A) \subseteq Sp_{\epsilon}(A).$$

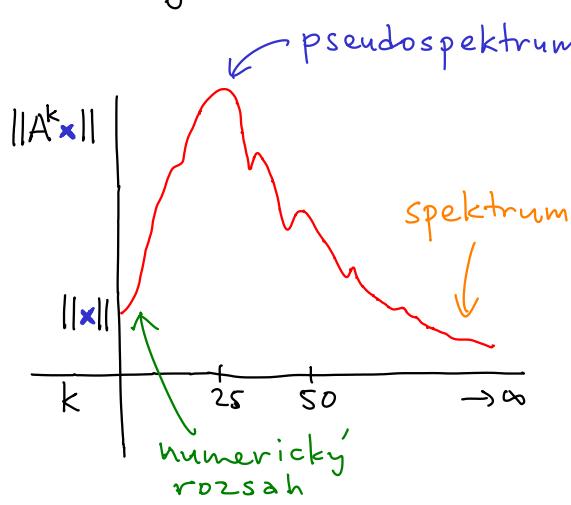
Jak moc se změní vlastní čísla malou perturbací (kde $\|E\|$ je operátorová norma matice).

Príklad: spectrální radius $S(A) = \max_{\mathbf{x} \in Sp(A)} |\lambda|$

Pokud $R(A) < 1$, víme, že $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ale pokud je A nenormální, třeba $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 10^5 \\ 0.9 & 0.9 \end{pmatrix}$, může konvergance dložko trvat.

$$A^{25} \approx \begin{pmatrix} 0.07 & 2 \cdot 10^5 \\ 0.07 & 0.07 \end{pmatrix}, \text{ tedy často } \|A^{25} \mathbf{x}\| > \|\mathbf{x}\|.$$



Nelze analyzovat začátek jen z vlastních čísel, prozradí pouze asymptotické chování.

6.5.2015 - 12. cvičení

[63]

Fourierova transformace v řeči lineární algebry

Fourierova řada

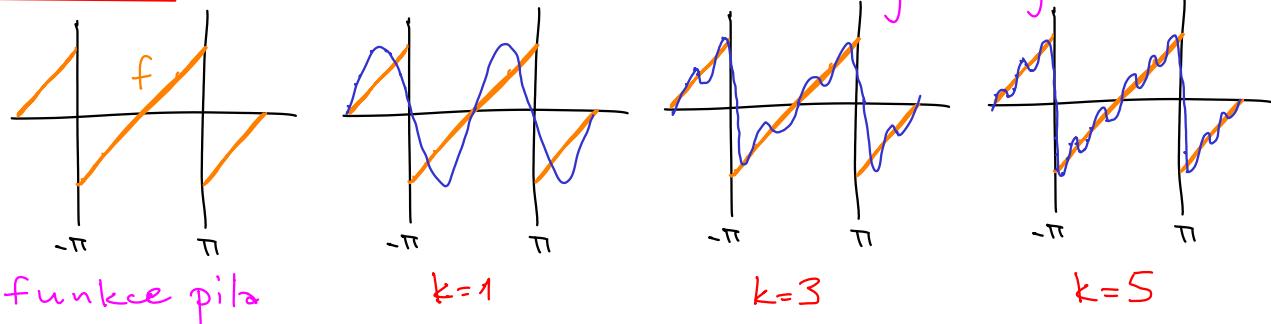
Mějme 2π -periodickou funkci $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

konkrétní hodnota periody není klíčová

Z určitých podmínek (dopř. složité) lze zapsat f jako součet řady:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Příklad:

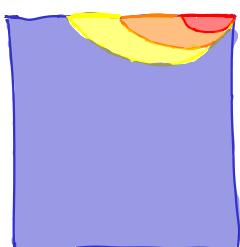


Motivace

Funkci f lze rozložit na vlny, koeficienty a_k, b_k jsou amplitudy. Důležité pro analýzu signálů.

Fourierova motivace byla pro řešení diferenciálních rovnic.

Rovnice tepla $\frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta h$ ve 2D. Chceme equilibrium



hodnoty na okraji předepsané, odpovídají zdroji tepla, uvnitř chceme teploty zprůměrovat

Znaly se řešení, pokud zdroje tepla byly siny a cosiny. Fourier vymyslel, že tato řešení lze sečítat pro obecný zdroj f .

Například na čtverci $[0; \pi] \times [0; \pi]$, kde nahore vrostou teploty lineárně $h(x, \pi) = x$, jinde na hranici nuly:

$$h(x, y) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \frac{\sinh(ky)}{\sinh(k\pi)}.$$

↑ neexistuje jednodušší forma

[64] Uvažme jednodušší problém:
 $\frac{d^2y}{dx^2} = f$, to je soustava lineárních rovnic $\frac{d^2}{dx^2}y = f$.
 lineární operátor
 pravé strana

To odpovídá $Ax = b$ na prostoru funkcí. Protože má nekonečnou dimenzi, nejde aplikovat Gaußovku.

Kdyby b byl vlastní vektor A , potom hned víme, že $x = \frac{b}{\lambda}$.

Nechť y_1, \dots, y_n je báze z vlastních vektorů,
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou jejich vlastní čísla.

$Ax = b$ lze řešit ve dvou krocích:

① Vyjádříme $b = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$.

② Získáme řešení $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{y_i}{\lambda_i}$.

Jak to použije v řešení $\frac{d^2}{dx^2}y = f$?

Funkce $\cos(kx)$ a $\sin(kx)$ jsou vlastní vektory $\frac{d^2}{dx^2}$, někdy se jim říká vlastní funkce:

$$\frac{d^2}{dx^2} \cos(kx) = -k^2 \cos(kx), \quad \frac{d^2}{dx^2} \sin(kx) = -k^2 \sin(kx).$$

Tedy pokud $f \in \langle \frac{1}{2}, \cos(kx), \sin(kx) : k \geq 1 \rangle$, lze využít ② a nalézt funkci y .

Z tohoto důvodu je klíčové zkoumat vlastní funkce a čísla operátorů derivace a dalších. ← klíčové téma funkcionální analýzy

- Třeba vlastní funkce $\frac{d}{dx}$ jsou exponenciely $e^{\lambda x}$, neboť $\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$.

Dále $\frac{d}{dx} x^k e^{\lambda x} = \lambda x^{k-1} e^{\lambda x} + k x^{k-1} e^{\lambda x}$, to jsou řetízky v Jordanově normální formě. Proto se exponenciely tak často objevují při řešení diferenciálních rovnic.

Tím tedy lze aplikovat ②, za předpokladu, že umíme vyjádřit $\mathbf{b} = \sum a_i \mathbf{y}_i$ v knoku ①, což vede na $\mathbf{Y}\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

[65]

Pro nekonečně mnoho dimenzi by to byla soustava řad, nevím jak řešit.

Druhá klíčová vlastnost Fourierovy řady: ortogonalita.

Uvažme standardní skalární součin $\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$.

Funkce $\frac{1}{2}, \cos(kx), \sin(kx)$ jsou ortogonální, neboť

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(lx) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = 0, \quad \dots$$

$k \neq l$

↑ výpočet je standardní pomocí per partes

Dále $\|\cos(kx)\| = \|\sin(kx)\| = \sqrt{\pi}$.

Proto lze koeficienty $\sum a_i y_i$, tedy a_k a b_k , určit pomocí kolmých projekcí na osy y_i , tedy $a_i = \frac{\langle b | y_i \rangle}{\|y_i\|^2}$:

$$a_k = \frac{\langle f | \cos(kx) \rangle}{\|\cos(kx)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Fourierova báze $\frac{1}{2}, \cos(kx), \sin(kx)$ je ortogonální báze z vlastních vektorů operátora $\frac{d^2}{dx^2}$.

Pojem báze je v nekonečně dimenzích složitý, musí se řešit druh konvergence (bodová, stejnoměrná), existence limity, pouze na určitých podprostорech.

Fourierova transformace je přechod do Fourierovy báze.

Lze volit i jiné podobné báze, studuje harmonická analýza.

Spojitá: $\{e^{-2\pi i x \xi} : \xi \in \mathbb{R}\}$, diskrétní: $\{e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} : 0 \leq k < N\}$.

↑ Transformace $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, rychlá!

66 Ukořime na závěr jednoduchou teoretickou aplikaci Fourierovy řady na řešení basilejského problému:

Víme, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c}$ konverguje, právě když $c > 1$.

Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, ← harmonická řada diverguje

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \leftarrow \text{basilejský problém}$$

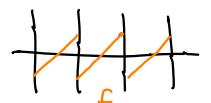
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \notin \mathbb{Q}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} = ?, \dots$$

↑ ↑ ↑
není známo všechny sudé není známo
přesně mociiny lze řešit podobně

Lemma: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Důkaz: Použijeme Fourierovu řadu funkce pila

$$f(x) = x \quad \text{pro } x \in (-\pi; \pi].$$



$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx) dx = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

↑ ↑
lichá funkce na snadný výpočet
symetrickém intervalu integrálu

Nyní aplikujeme Pythagorovu větu: $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \|\sin(kx)\|^2$. ← pro nekonečně mnoho dimenzi

Levá strana: $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3.$

Pravá strana: $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \|\sin(kx)\|^2 = 4 \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$

Proto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

□

12.5.2015 - 13. cvičení

67

Pozitivně definitní matice: extrémy a energie

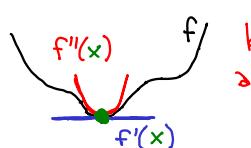
Hledání extrémů funkcí

Pro jednu proměnnou lze použít derivace.

Kandidáti: Body x s $f'(x) = 0$. → jinak by nemohl být extrém

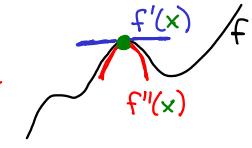
Test pomocí druhých derivací:

$$f''(x) > 0$$

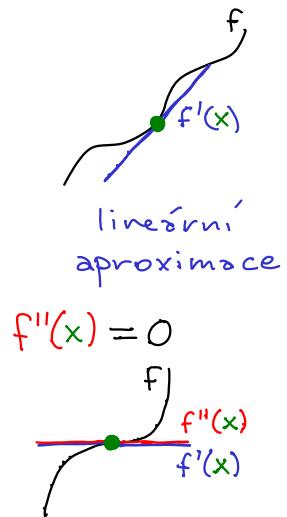


lokální minimum

$$f''(x) < 0$$



lokální maximum



nevíme, může být inflexní bod, nebo extrém: x^3 vs. x^4 .

Můžeme derivovat dál a dozvědět se.

Proč to funguje? Derivace popisují nejlepší lokální approximace polynomem. Tento polynom se nazývá Taylorův polynom.

Předpokládejme, že $x=0$ je kandidát:

$$T_f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

na extrémy
nemá vliv

lokálně převládně první
nenulový člen $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$:

$\begin{cases} k \text{ liché:} \\ \text{inflexní bod,} \\ k \text{ sudé:} \\ \text{extrém, podle znaménka.} \end{cases}$

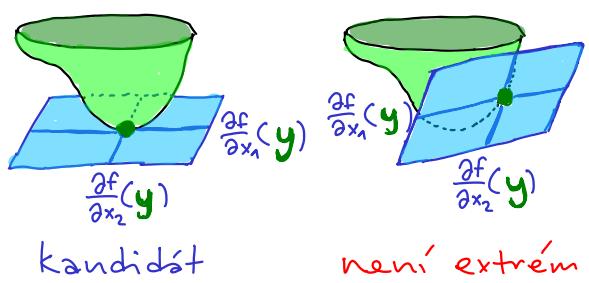
Hledání extrémů funkcí více proměnných $f(x_1, \dots, x_n)$

Lze použít parciální derivace, ale je to trochu složitější.

① Přiložíme tečnou rovinu.

Kandidáti: $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, že

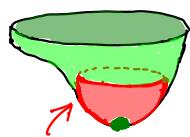
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}) = 0.$$



68 ② Přiložíme tečný kvadratický polynom.

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = \sum_i \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial x_i^2} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j.$$

\mathbf{y} posunutí z \mathbf{x}



lokální kvadratická
approximace

koeficienty

Zajímá nás lokální chování
 $P(\mathbf{x})$, stejné jako globální
chování.

Možnosti:

$P(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pozitivně definitní

lokální minimum

$P(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ negativně definitní

lokální maximum

$P(\mathbf{x}) \geq 0 \quad$ pozitivně semidefinitní

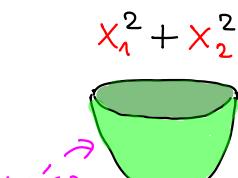
} nevím, derivace
vyšších řádu

$P(\mathbf{x}) \leq 0 \quad$ negativně semidefinitní

není extrém

$\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad P(\mathbf{x}) < 0, P(\mathbf{y}) > 0 \quad$ indefinitní

Příklady $P(x_1, x_2)$, existuje šest typů:



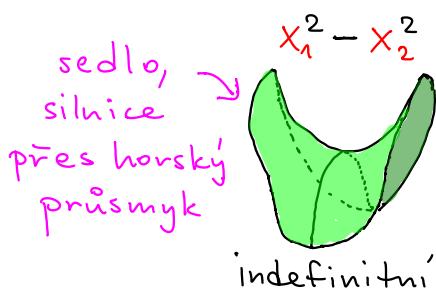
pozitivně def.

$$-x_1^2 - x_2^2$$

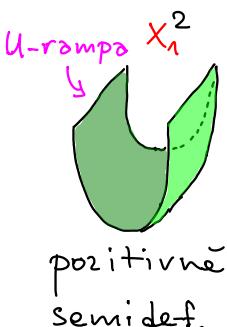


převrácená míska

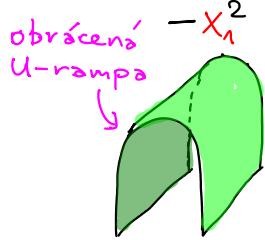
negativně def.



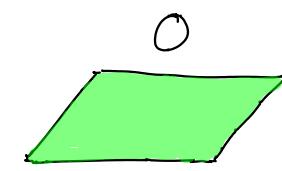
indefinitní



pozitivně
semi-def.



negativně
semi-def.



pozitivně i
negativně
semi-def.

Všechno pro dvě
proměnné, podle
Sylvesterovy věty.

Třeba $P(x_1, x_2) = x_1 x_2$
je sedlo otocené o 45°.

Jak ale zjistit typ daného polynomu?

Pomocí technik lineární algebry.

Ostatně hodně jí vzniklo jako nástroje analýzy.

Mějme $P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$. Nechť a_{ij} jsou koeficienty matice A . Potom

↳ předpokládejme vše v \mathbb{R}

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}. \quad \leftarrow \text{kvadratická forma } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

↳ teorie je zajímavější

Budeme předpokládat, že matice A je symetrická, tedy

$$P(\mathbf{x}) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j.$$

Definujme:

- A je pozitivně definitní (SPD), pokud $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- A je negativně definitní (SND), pokud $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- A je pozitivně semidefinitní (PSD), pokud $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$.
- A je negativně semidefinitní (NSD), pokud $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$.
- A je indefinitní (ID) jinak: $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0, \mathbf{y}^T A \mathbf{y} > 0$.

Typ matice lze efektivně rozpoznat řadou kriterií.

Zaměřme se na pozitivně definitní matice, zkuste si rozmyslet odlišnosti pro negativně def. a semidef.

Šest ekvivalentních definic pozitivní definitnosti:

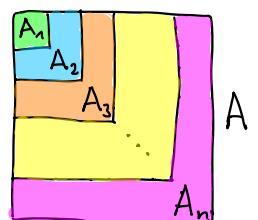
① $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

② Vlastní čísla $\lambda_i > 0$.

③ Determinanty principiálních minorů jsou kladné:

$$\det(A_1) > 0, \dots, \det(A_n) > 0.$$

Principiální minor A_k je podmatice $k \times k$ v levém horním rohu.



④ Gaußovu eliminaci lze provést bez prohazování a násobení řádků a má všechny pivoty $p_i > 0$.

⑤ Existuje regulární matice R , že $A = R^T R$.

⑥ $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ je skalární součin a $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}$ je norma.

70) Dokažme co nejvíce implikací:

① \Leftrightarrow ⑥) Dokázáno ve 2. cvičení.

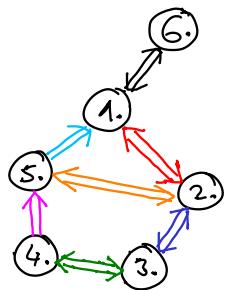
① \Rightarrow ②)

Ze symetrie jsou všechna vlastní čísla a vektory reálné. Pokud $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, potom

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} > 0, \text{ neboť } A \text{ je SPD}$$

$$= \frac{\lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} > 0, \text{ neboť } \|\mathbf{x}\|^2$$

Proto $\lambda > 0$. \square



① \Leftarrow ②)

Ze symetrie existuje spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^T$.

Nechť $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ je ortogonální báze z vlastních vektorů.

Pokud $\mathbf{x} = \sum \alpha_i \mathbf{q}_i$, potom:

$\xrightarrow{\text{z ortogonalitou}}$
 $\xrightarrow{0 \text{ pro } i \neq j}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= (\sum \alpha_i \mathbf{q}_i)^T A (\sum \alpha_j \mathbf{q}_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \mathbf{q}_i^T A \mathbf{q}_j = \sum_{i,j} \lambda_j \alpha_i \alpha_j \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \\ &= \sum_i \lambda_i \alpha_i^2 \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i = \sum_i \lambda_i \alpha_i^2 > 0. \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\geq 0 \text{ z předpokladu}}$ $\xrightarrow{\geq 0 \text{ a alespoň jedno kladné}}$ \square

Věta o proplétání vlastních čísel

Nechť A je symetrická a B vznikne z A vyškrtnutím i-tého řádku a sloupce. Nechť $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla A a $G_1 \geq \dots \geq G_{n-1}$ vlastní čísla B. Potom:

$$\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ G_1 & & G_2 & & G_3 & & \dots & & G_{n-1} \end{matrix}$$

$$\lambda_i \geq G_i \geq \lambda_{i+1}.$$

$\xrightarrow{\text{Sp}(A) \quad 0 \quad \text{Sp}(B)}$

Důkaz příště, tedy aplikujme.

② \Rightarrow ③)

Podle věty o proplétání jsou vlastní čísla všech minorů

A_k mezi λ_1 a λ_n , tedy jsou kladná. Proto $\det(A_k) > 0$. \square

② \Leftarrow ③)

Postupujme indukcí. Protože $\det(A_1) > 0$, je vlastní číslo kladné. Pokud A_k má kladná vlastní čísla, A_{k+1} by mohlo

mít podle věty o proplétání
nejvýše jedno nekladné vlastní
číslo λ_{\min} . Potom by však

$$\det(A_{k+1}) \leq 0, \text{ což je spor.} \quad \square$$

(3.) \Rightarrow (4.)

Protože $\det(A_k) > 0$, jsou podmatice A_1, \dots, A_n regulární. Proto lze provádět Gaussovu eliminaci bez prohazování řádků. Upravy nemění determinant, tedy $\det(A_k) = \prod_{i=1}^k p_i$. Proto

$$p_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})} > 0.$$

(3.) \Leftarrow (4.)

Gaussova eliminace nemění determinant žádné podmatice A_k , tedy $\det(A_k) = \prod_{i=1}^k p_i > 0$. \square

(4.) \Rightarrow (5.)

Lze získat přímo, ale uvažme LDU dekompozici:

$$A = \underbrace{LDU}_{\substack{\text{matrice úprav} \\ \text{kladná} \\ \text{diagonála} \\ \text{s pivoty } p_i}} = \underbrace{U^T D U}_{\substack{\text{odstupňovaný tvar} \\ \text{ze symetrie}}}$$

Protože $\exists \sqrt{D}$ s diagonálon $\sqrt{p_i}$, položme $R = \sqrt{D}U$. $A = R^T R$, navíc R je \blacksquare a $R^T R$ se nazývá Choleského rozklad. \square

(5.) \Rightarrow (1.)

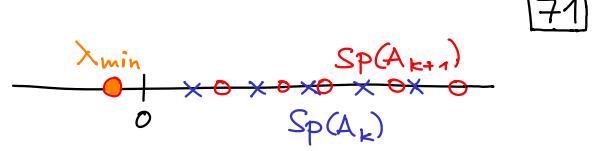
Dosadíme $R^T R$ za A :

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{x} = (R \mathbf{x})^T (R \mathbf{x}) = \|R \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|_A^2 > 0.$$

Kvadratická forma s pozitivně definitní maticí určuje čtverec nějaké normy. \square

(2.) \Rightarrow (5.)

Uvažme spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^T$. Protože Λ má kladnou



71

[72] diagonálnu, existuje $\sqrt{\lambda}$ s diagonálou $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$.

Potom $R = \sqrt{\lambda} Q^T$ a $A = R^T R$. □

② \Leftarrow (S.)

Nechť $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, potom $\lambda = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{\|R\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\|\mathbf{x}\|_A^2}{\|\mathbf{x}\|^2} > 0$,
neboť je to podíl čtverců norm. □

Proč jsou pozitivně definitní matice tak důležité?

Dva dobré důvody:

① Propojují celou lineární algebru. Proto mají speciální vlastnosti a řada problémů je pro ně mnohem jednodušších ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$).

② Pozitivně definitní matice se často objevují.

Ve statistice kovarianční matice lineárních závislostí.

Ve fyzice se používají k modelování energie.

Například systém pružin z 9. cvičení má potenciální energii $\mathbf{x}^T L_G \mathbf{x} = \sum_{ij \in E} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2$.

Věta: Nechť A je pozitivně definitní. Potom

\mathbf{x} minimalizuje $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

↑ ↑
minimalizace za podmínek
energie

Na toto je právě založen Tutteho postup.

19.5.2015 - 14. cvičení

73

Sylvestrova věta o setrvačnosti a minimaxová věta

Chceme pochopit strukturu libovolné kvadratické formy $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. To je snadné pro \mathbf{A} diagonální: $\sum a_{ii} x_i^2$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 = \frac{1}{2} (\underbrace{x_1 + x_2}_y)^2 + \frac{3}{2} (\underbrace{x_1 - x_2}_y)^2 = \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{3}{2} y_2^2 = \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 3/2 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Tedy \mathbf{A} je SPD.

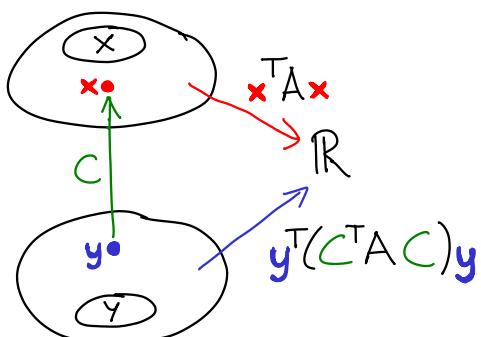
↑ Vhodnou substitucí jsme získali diagonální formu.

Substituce, aneb přechod do jiné báze

Nechť $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$, kde \mathbf{C} je regulární matice.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{C} \mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C} \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}.$$

Tedy \mathbf{A} a $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ reprezentují stejné kvadratické formy vůči různým bázím.



Def: \mathbf{A} je kongruentní s \mathbf{B} , značeno $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pokud $\exists \mathbf{C}$ regulární:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}.$$

Obdoba podobnosti: $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$.

Kongruence má třídy ekvivalence, které odpovídají rozdílným kvadratickým formám. Elegantně je charakterizuje Sylvestrova věta o setrvačnosti:

Věta: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, právě když mají stejně kladných, záporných a nulových vlastních čísel.

↑ Tyto tři počty jsou signatura matice (n_+, n_-, n_0) .

[74] Důkaz: Nejprve dokážme, že pokud $A \succ B$ mají stejnou signaturu (n_+, n_-, n_0) , potom jsou kongruentní.

Stačí ukázat, že $A \sim D$, kde D je diagonální matici

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & n_0 \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože A je symetrická matici, existuje spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^T$, seřadíme nejprve pozitivní vl. čísla, pak negativní, pak nulová.

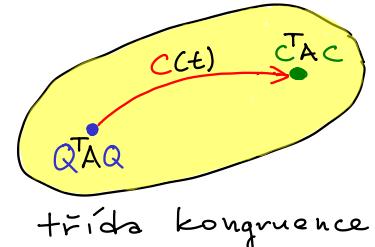
Zvolme diagonální $(\sqrt{\Lambda})_{ii} = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i} & \lambda_i \neq 0, \\ 1 & \lambda_i = 0, \end{cases}$ potom $\sqrt{\Lambda}^T D \sqrt{\Lambda}^T = \Lambda$.

Tedy $A = \underbrace{Q \sqrt{\Lambda}}_{C^T} \underbrace{D}_{C} \underbrace{\sqrt{\Lambda}^T}_{Q^T} Q$ a $A \sim D$.

Druhou implikaci dokážeme elegantním topologickým důkazem. Chceme ukázat, že $A \succ C^T A C$ mají stejnou signaturu. Předpokládejme, že A je regulární, jinak aplikujme důkaz na $A + \epsilon I$, kde $\epsilon \rightarrow 0$.

Nechť Q je ortogonální matici.

Potom A a $Q^T A Q$ mají stejná vlastní čísla.
 ← není spektrální rozklad
 ← z podobnosti



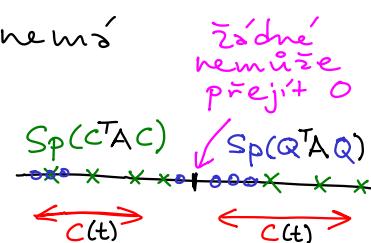
Nyní uvažme spojitou transformaci z $Q^T A Q$ na $C^T A C$:

$$C(t) = t \underbrace{C + (1-t)Q}_{\text{konvexní kombinace}}, \quad t \in [0;1], \quad \text{tedy } C(0) = Q, \quad C(1) = C.$$

Klíčové: vlastní čísla $C(t)^T A C(t)$ se mění spojitě s t .

① Předpokládejme, že $C(t)$ je regulární $\forall t \in [0;1]$.

Potom je i $C(t)^T A C(t)$ regulární, tedy nemá žádné nulové vlastní číslo. Ze spojitosti vlastní čísla nemohou změnit znaménko, tedy $A \succ C^T A C$ mají stejnou signaturu.



② Musíme vhodně zvolit ortogonální Q .

75

Odvodíme z C , uvažme QR rozklad $C = QR$.

Víme, že R má kladnou diagonálu.

$$C(t) = tQR + (1-t)Q = Q(tR + (1-t)\mathbb{I}).$$

regulární \rightarrow

Konvexní kombinace dvou
■ matic s kladnou diagonálou,
má kladnou diagonálu a je
regulární.

Proto je $C(t)$ regulární.

□

Pokud je A regulární, lze signaturu zjistit ze znamének pivotů: n_+ je počet kladných, n_- počet záporných.

Kolik je tříd kongruence pro matice $n \times n$? Snadným výpočtem je to $\binom{n+2}{2}$. ← počet voleb n_+, n_- , že $n_+ + n_- \leq n$

Pro $n=2$ je jich 6, z minulého cvičení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geometrie tříd kongruence

Uvažme symetrické matice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,

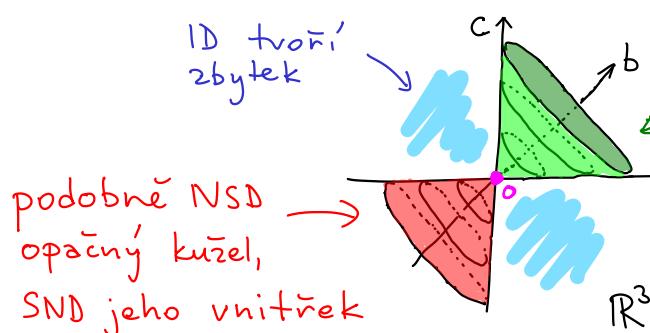
můžeme reprezentovat body (a, b, c) v \mathbb{R}^3 .

Jak geometricky vypadá množina SPD matic?

① $a > 0, c > 0$, ② $\det(A) = ac - b^2 > 0$.

určuje čtvertprostor

lze udělat geometrické odvození,
které vynecháme



PSD tvorí kužel,
SPD jeho vnitřek

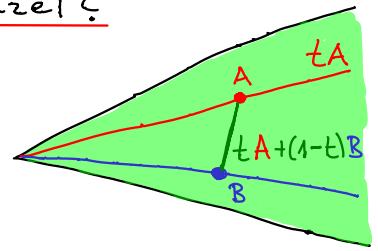
Podobně pro větší n ,
akorát fyzikálně na představu.

[76] Proč pozitivně definitní matice tvorí kužel?

Lemmas: Nechť A, B jsou SPD. Potom

(i) tA je SPD pro libovolné $t > 0$,

(ii) $tA + (1-t)B$ je SPD, kde $t \in [0; 1]$.



Množina SPD matic je konvexní a uzavřená na paprsky, PSD podobně. Důkaz je srovný přímo z definice.

Rayleyho kvocienty

Mějme symetrickou matici A s vlastními čísly

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ a vlastními vektory y_1, \dots, y_n . ← ortonormální báze

Potom $\lambda_i = y_i^T A y_i$. Označme $R_A(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$, kde $\mathbf{x} \neq 0$.

\uparrow Rayleyho kvocient \uparrow pouze normování chování kvadratické

Nechť $\mathbf{x} = \sum \alpha_i y_i$, potom formy na jednotkové sféře

$$R_A(\mathbf{x}) = \frac{\sum \alpha_i^2 \lambda_i y_i^T y_i}{\sum \alpha_i^2} = \frac{\sum \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum \alpha_i^2}.$$

Pozorování: $\max_{\mathbf{x} \neq 0} R_A(\mathbf{x}) = \lambda_1$, $\min_{\mathbf{x} \neq 0} R_A(\mathbf{x}) = \lambda_n$.

Důkaz: Nechť $\|\mathbf{x}\|=1$, tedy $|\alpha_i| \leq 1$ a $\sum \alpha_i^2 = 1$. Potom je $\sum \alpha_i^2 \lambda_i$ maximalizována pro $\alpha_1=1$, minimalizována pro $\alpha_n=1$. □

Courant-Fischerova minimaxová věta.

Každé vlastní číslo λ_k lze popsát podobně:

Věta: Nechť A je symetrická matici. Potom

$$\lambda_k = \max_{U_k} \min_{\mathbf{x} \neq 0} R_A(\mathbf{x}) = \min_{V_k} \max_{\mathbf{x} \neq 0} R_A(\mathbf{x}).$$

$\dim(U_k)=k \quad \mathbf{x} \in U_k \quad \dim(V_k)=n-k+1 \quad \mathbf{x} \in V_k$

Důkaz: Zaměřme se pouze na první rovnost, druhá se dokáže analogicky.

$\geq \lambda_k$: Zvolme $U_k = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$, zbytek jako v důkazu pozorování, s minimalizací.

" $\leq \lambda_k$ ": Nechť U_k je libovolný podprostor dimenze k . [7]
 Zvolme $V_k = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ dimenze $n-k+1$. Proto $\exists \neq 0$,
 že $x \in U_k \cap V_k$. Proto minimum v U_k je menší či rovno
 $R_A(x)$. Na druhou stranu pro V_k víme jako v pozorování,
 že $R_A(x) \leq \lambda_k$. □

Poznámka: V důkazu věty využíváme, že volba U_k / V_k
 je vlastní podprostor (uzavřen na obrazy v A). Proto
 $A \cap U_k \neq A \cap V_k$ jsou symetrické matice a platí pozorování.

Tato věta má spíše teoretické důsledky, ne přímo
 určena k počítání. Ukažme jeden z nich:

Věta (o proplétání vlastních čísel)

Neckť A je symetrická a B vznikne z A vyškrtnutím
i-tého řádku a sloupce. Neckť $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ jsou vlastní
 čísla A a $G_1 \geq \dots \geq G_{n-1}$ vlastní čísla B . Potom:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n & & \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & & \\ G_1 & G_2 & G_3 & \dots & G_{n-1} & & \\ & & & & & & \end{array} \quad \lambda_i \geq G_i \geq \lambda_{i+1}.$$

Důkaz: Bez újmy na obecnosti, neckť $i=n$, tedy v B je vyškrtnutý poslední řádek a sloupec. Potom
 $R_B(y) = R_A(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix})$. Neckť $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$.

- Protože U_k volíme pro B na podprostoru W , zjevně
 $\lambda_k \geq G_k$.
- Na druhou stranu neckť U_{k+1} definuje λ_{k+1} z věty.
 Proto $U_k = U_{k+1} \cap W$ je dimenze alespoň k , tedy

$$G_k \geq \min_{\substack{y \neq 0 \\ y \in U_k}} R_A(y) \geq \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in U_{k+1}}} R_A(x) = \lambda_{k+1}.$$
□

78 Positivně definitní matice a elipsoidy.

Nechť A je positivně definitní matice, uvažme množinu

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1 \}.$$

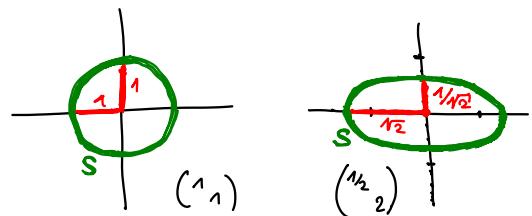
Pokud $A = I_n$, splňuje $\sum x_i^2 = 1$ n-rozměrná jednotková sféra S .

V případě diagonální matice $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ je to elipsoid s osami o délce $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ ve směru os kanonické báze.

A jak S vypadá obecně?

Uvažme spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^T, \quad \text{rotace}$$



tedy $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1$, pokud $(Q^T \mathbf{x})^T \Lambda (Q^T \mathbf{x}) = 1$.

Nechť $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ jsou vlastní vektory a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla.

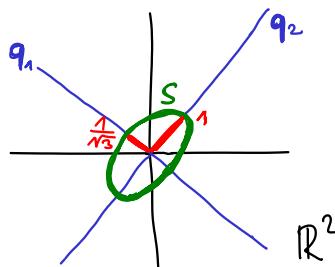
Potom S je elipsoid ve směru vlastních vektorů o délkách $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ (což je kladné z pozitivní definitnosti).

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Připomeňme ze 2. cvičení, že positivně definitní matice tvoří normu ustanovenou těmito elipsoidy.

Literatura

Pavel Klavík: Povídání o lineární algebře

Pokryvá zimní semestr, pojmy jako vektorový prostor, matice, lineární zobrazení.

http://pavel.klavik.cz/vyuka/texty/povidani_o_la.html

Pavel Klavík: Přednáška Lineární algebra III

Navazující text, obsahuje například dekompozici podle singulárních hodnot, úvod do numerické lineární algebry, algoritmy na výpočet vlastních čísel.

<http://pavel.klavik.cz/vyuka/texty/la3.html>

Gilbert Strang: Linear Algebra and Its Applications

Skvělá úvodní kniha k lineární algebře, řada věcí je na pokročilem cvičení z ní inspirována.

James Demmel: Applied Numerical Linear Algebra

Kniha o praktickém počítání v lineární algebře, o vlivu zaokrouhlování a aplikacích.