

Přednáška

Lineární algebra III

Pavel Klavík

ITI 2014-603

[2]

Text k přednášce Lineární algebra III,
na MFF UK v zimním semestru 2013/2014.

Vyrobeno v programu Xournal.

Poděkování:

- Zdeňku Strakošovi za přednášku o Krylovových podprostorech a metodě konjugovaných gradientů.
- Studentům přednášky za četné dotazy a připomínky k tomuto textu.

Vydal Matfyzpress,

vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty

Univerzity Karlovy v Praze,

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8,

jako svou 455. publikaci.

Tisk Reprocentrum UK MFF,

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8,

© Pavel Klavík (ITI), 2014.

© Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2014.

ISBN 978-80-7378-261-0

Obsah:

- 5 ... Opakování LA1, z trochu jiného úhlu a náhledu
- 9 ... Metoda konečné mřížky a úvod do vlastních čísel
- 13 ... Zavedení vlastních čísel bez determinantu
- 19 ... Dva světy lineární algebry – exaktní a ten numerický
- 23 ... Ortogonální matice a QR dekompozice
- 27 ... Singulární rozklad matice SVD
- 31 ... Numerický výpočet vlastních čísel obecné matice, QR metoda
- 35 ... Metody Krylovových podprostorů a metoda konjugovaných gradientů (přednášel Z. Strakoš)
- 39 ... Výpočet vlastních čísel symetrických matic
- 43 ... Literatura

4

Lineární algebra III – 1. přednáška 7.10.2013 [5]

Opakování LA1, z trochu jiného úhlu a náhledu

Lineární algebra je o studiu vektorových prostorů a lineárních zobrazení (transformací).

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

"zachová" strukturu"
v algebře homomorfismus

MATICE

– Jeden možný pohled:

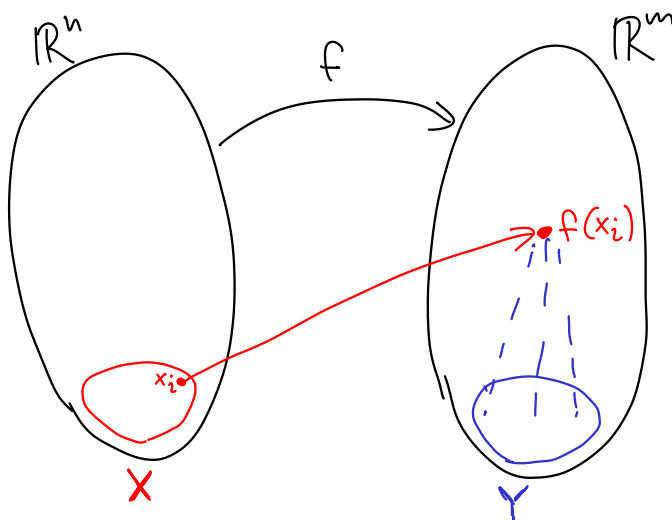
„tabulka reálných čísel“

– Pro mě osobně klíčové:

MATICE je reprezentace lineárního zobrazení.

↙ **Proč?**

☞ $f(\sum \alpha_i x_i) = \sum \alpha_i f(x_i)$, tedy k popsání celého lin. zobrazení stačí znát obrazy libovolné báze, zbytek je už určený.



Zvolíme si dvě báze X a Y.

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

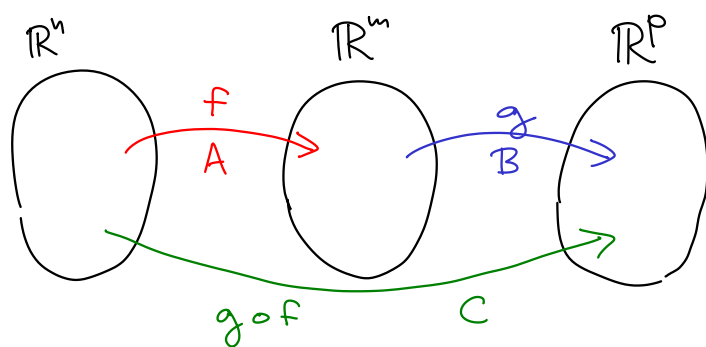
Každý vektor $f(x_i)$ lze popsat pomocí m souřadnic vůči bázi Y.

Což je MATICE $m \times n$.

→ Zapišeme je do sloupeček vedle sebe.

6] Když si to člověk rozeře, dostane následující
(doporučuji vyzkoušet jako cvičení):

- Vektory zobrazujeme tak, že je násobíme A zleva, tedy $f(x) = Ax$ a $f: x \mapsto Ax$.
- Proto pro nalezení vektorů b , tedy $f^{-1}(b)$, musíme vyřešit soustavu $Ax = b$.
- Skládání lin. zobrazení odpovídá násobení matic:



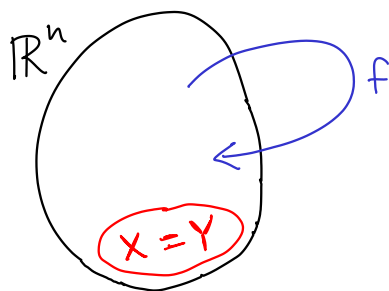
$$C = BA.$$

Proto lze násobit pouze matice, které sdílejí jeden rozměr.

- Inverzní lin. zobrazení f^{-1} nemusí existovat.

Pokud ale existuje, je reprezentováno vůči stejným bazím inverzní maticí A^{-1} .

- Pokud je lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, typicky volíme $X=Y$ a někdy se f nazývá lineární operátor.



Fundamentální podprostory matice A

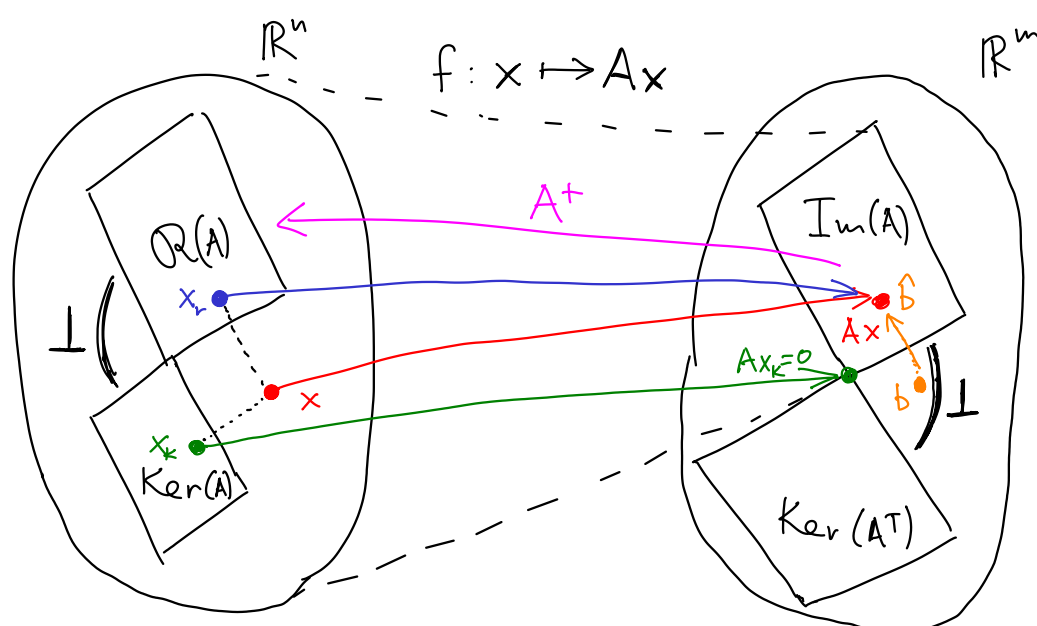
7

Podprostory $\mathbb{R}^n$:

- kernel $\text{Ker}(A)$,
 - řádkový prostor $\mathcal{R}(A)$.
- } ortogonální doplňky

Podprostory $\mathbb{R}^m$:

- image $\text{Im}(A)$ neboli sloupcový prostor $\mathcal{R}(A^T)$,
 - levý kernel $\text{Ker}(A^T)$.
- } opět ortogonální doplňky



- Není těžké dokázat, že $f|_{\mathcal{R}(A)}$ je isomorfismus, a tedy $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \text{Im}(A)$.

- Informace z $\text{Ker}(A)$ je zobrazením f ztracena, tedy pro $\text{Ker}(A) \neq 0$ neexistuje inverze f^{-1} !

Ale můžeme alespoň invertovat $\text{Im}(A)$ do $\mathcal{R}(A)$, a toto se nazývá pseudoinverze A^+ .

- Když $b \notin \text{Im}(A)$, $Ax = b$ nemá řešení. Lze ale kolmou projekcí získat nejbližší $\hat{b}$, pro které řešení existuje: Metoda nejmenších čtverců.

8 KAŽDÁ MATICE POPISUJE PROCES

Lze využít technik lineární algebry k pochopení.

$G=(V,E)$ je graf. $|V|=n, |E|=m$

- Matice sousednosti A_G

Proces procházky nad grafem:

$$A_G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$(A_G x)_i = \sum_{j \in N(i)} x_j,$$

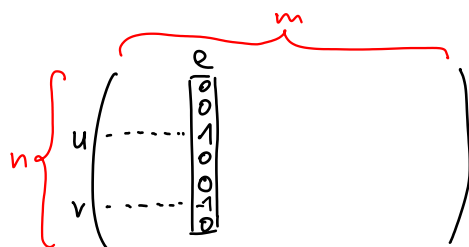
tedy A_G sčítá ohodnocení sousedů.

- Matice incidence

I_G

$$I_G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$I_G^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$



Zvolíme libovolnou orientaci.



Transformujeme ohodnocení hran na ohodnocení vrcholů a naopak.

Cvičení: Jak vypadají fundamentální podprostory matice I_G ? Kombinatorická interpretace? Dimenze?

Lze třeba dokázat Eulerovu větu pro rovinné grafy, zvolením jiné báze prostoru cyklů.

- Laplaceova matice L_G $(L_G)_{ij} = \begin{cases} \deg(i) & i=j, \\ -1 & ij \in E, \\ 0 & ij \notin E. \end{cases}$

Diskretizace Laplaceova operátoru.

Jak moc se ohodnocení vrcholů liší od sousedů?

Lineární algebra III – 2. přednáška 14.10.2013 9

Metoda konečné mřížky a úvod do vlastních čísel

Jedna z metod diskretizace diferenciálních rovníc, která vede na soustavu $Ax=b$.

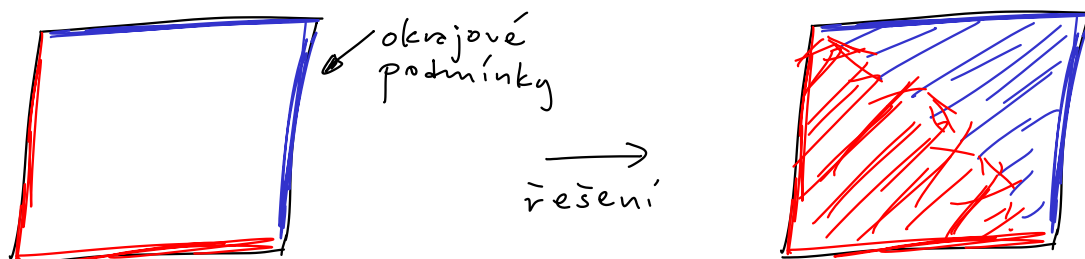
Uvažme Laplaceovu rovnici $\Delta f = 0$.

Laplaceův operátor $\Delta f = \underbrace{\nabla \cdot \nabla f}_{\text{divergence gradientu}} \stackrel{\vee \mathbb{R}^n}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Toto popisuje, jak se gradient průměrně chová na okolí bodu, tedy jak moc se hodnota $f(x_1, \dots, x_n)$ odlišuje od průměrných hodnot na okolí.

Klíčový význam ve fyzice (šíření tepla, elektromag):

Teplota se průměruje na teplotu okolí.
Potom řešení $\Delta f = 0$ (třeba s okrajovými podmínkami) odpovídá ustálenému stavu v distribuci teplot (equilibrium).

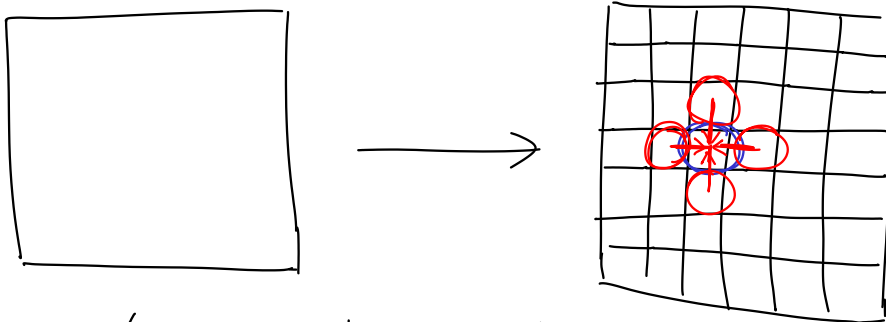


Nebo obecněji Poissonova rovnice $\Delta f = g$ hledá řešení s předepsaným tokem (teplot).
Tyto rovnice mají řadu přirozených aplikací.

10 Problém je, že nejsou většinou analyticky vyřešitelné.

Proto lze provést diskretizaci a vyřešit soustavu.

Metoda konečné mřížky: Nasekáme prostor na malé kousky. Každý kousek má konstantní teplotu a její změna závisí pouze na teplotách okolních kousků.



Z derivací se stanou difference, proměnných je pouze konečný počet $\Rightarrow$ soustavu lineárních rovnic.

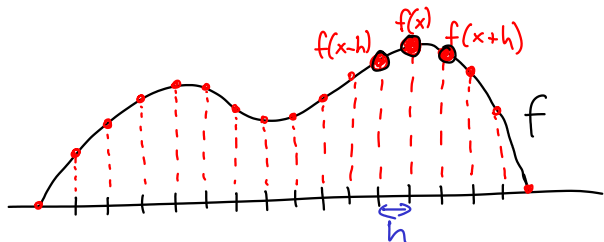
Z Laplaceova operátoru $-\Delta f$ se stane Laplaceova matice grafu mřížky (ale obecně lze aproximovat nepravidelně).
 ↑ převrácené znaménko!

$$L_G = \begin{pmatrix} d_1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & d_n \end{pmatrix},$$

$$(L_G \cdot x)_i = d_i x_i - \sum_{j \in E} x_j = \\ = d_i \left(x_i - \frac{1}{d_i} \sum x_j \right).$$

*↑
O kolik se liší x_i od průměru x_j na sousedech.*

Odvození matice pro cestu:



$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+\frac{1}{2}h) - f'(x-\frac{1}{2}h)}{h} = \\ = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Zajímá nás hodnota funkce pouze v některých bodech.

Tedy $-f''(x) = b(x)$ vede na $L_G x = b$.

Mimochodem soustavy z těchto diskretizací jsou typicky řídké, tedy obsahují hodně nul.

Jeden z fundamentálních problémů numeriky je:
Jak tohoto využít?

$$\begin{array}{c}
 \text{Gaussova eliminace} \\
 \Rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 1 & 1 & & & & \\
 1 & & 1 & & & \\
 1 & & & 1 & & \\
 \vdots & & & & \ddots & \\
 1 & & & & & 1
 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 0 & 0 & & & & \\
 0 & 0 & & & & -1 \\
 0 & & 0 & & & \\
 \vdots & & & -1 & 0 & \ddots \\
 0 & & & & 0 & \ddots & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Řidkost ztracena.

Iterační nepřímé metody, například:
CG: x je aproximováno
Krylovovým
podprostorem
 $\langle b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b \rangle$.

Motivace pro studium vlastních čísel.

Co jsou vlastní čísla?

- Kořeny char. polynomu $\det(A - \lambda I)$.
- Řešení rovnice $Ax = \lambda x$ pro $x \neq 0$.
vlastní číslo vlastní vektor

Toto je lepší, i když nevíme nic o existenci.

To je ale hodně nejasné.
 Víme, že jich je n , ale co to znamená?

Představme si, že by pro matici A existovala báze vlastních vektorů $x_1, \dots, x_n$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

① Nejkrásnější možná báze pro lin. zobrazení reprezentované maticí A .

$$A = S \mathbf{D} S^{-1}, \text{ kde } S = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Zobrazení se chová diagonálně vůči této bázi.

② Vývoj lineárního systému $y_{k+1} = Ay_k$.

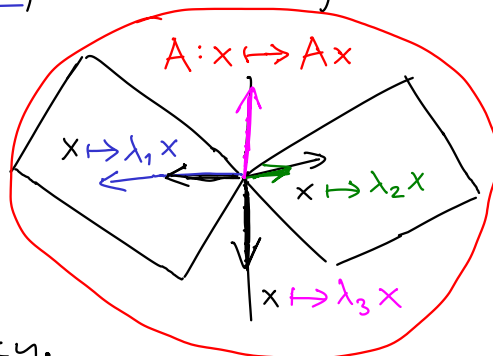
Kdyby y_0 byl vlastní vektor $\Rightarrow y_k = \lambda^k \cdot y_0$.

Obecně $y_0 = \sum d_i x_i$, tedy

$$y_k = A^k y_0 = A^k \sum d_i x_i = \sum d_i \lambda_i^k x_i.$$

12 Existence této báze umožňuje rozložit zobrazení na nezávislé části, na kterých se chová jednoduše.

Příklad: s vlastními čísly
Matice A velikosti 5×5 , $2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$.

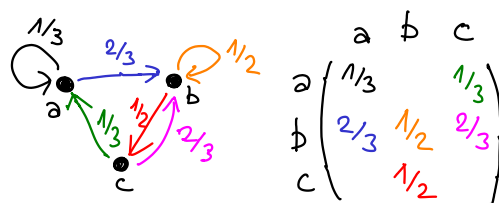


Aplikace na náhodné procházky.

Lze reprezentovat maticí A pravděpodobností.
Krok procházky $p \mapsto Ap$, kde p je vektor pravd.
distribuce.

Třeba rovnoměrně nad grafem,
kdyby byl k -regulární,
potom je $A = \frac{1}{k} A_G$.

Obecně Markovský proces.



Kdybychom znali vlastní vektory a vlastní čísla,
umíme určit vývoj systému $A^n p = \sum \alpha_i \lambda_i^n x_i$.

Spektrální radius $\rho(A) = \max |\lambda_i|$.

V limitě $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n p$ převládne největší exponenciála $\Rightarrow$
skoro vždy závisí pouze na hodnotě $\rho(A)$.

$\rho(A) \begin{cases} > 1 & A^n p \rightarrow \infty, \text{ diverguje.} \\ = 1 & A^n p \rightarrow x \text{ nebo osciluje, obecně složitě.} \\ < 1 & A^n p \rightarrow 0, \text{ konverguje.} \end{cases}$

Pro stochastické procesy $\rho(A) = 1$
a podle Perron-Frobeniových vět
distribuce konverguje

Pro k -reg. graf je to $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ $\leftarrow$ distribuce konverguje
a rychlost podle rozdílu $|\lambda_1| - |\lambda_2|$. do ustáleného stavu.

Lineární algebra III – 3. přednáška 21.10.2013 13

Zavedení vlastních čísel bez determinantů (podle S. Axler: Down with Determinants)

Protože existence vlnčísla je ekvivalentní s existencí kořenu komplexního polynomu, začneme tradičně:

Věta: $\exists z \in \mathbb{C}$, že $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$.

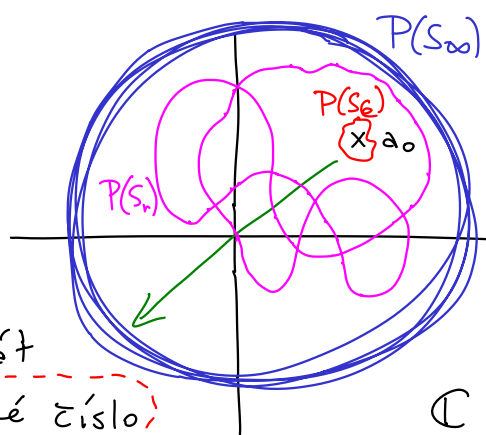
Důkaz: Topologicky, využijeme spojitost polynomu.

Obrazem spojitě křivky je spojitá křivka. Necht' S_r je kružnice v komplexní rovině o poloměru r .

BÚNO $a_0 \neq 0$, jinak $z=0$ je kořen.

- Pokud r je dostatečně malé ϵ , platí $P(z) \approx a_0$. Tedy $P(S_\epsilon)$ je omotaná okolo a_0 .

- Podobně pokud je r velké, $P(z) \approx a_n z^n$, tedy $P(S_\infty)$ n -krát obmotá počátek. " ∞ " = hodně velké číslo



Pokud spojitě měníme poloměr $\epsilon \rightarrow \infty$, přejde $P(S_\epsilon)$ spojitě v $P(S_\infty)$, a tedy někdy protne nulu $\Rightarrow$ existuje kořen $P(z)=0$. □

Věta: Pro každou matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existuje vlastní číslo.

Důkaz: Uvažme Krylovův podprostor pro libovolný nenulový vektor u : $\langle u, Au, A^2u, \dots, A^n u \rangle \subseteq \mathbb{C}^n$.

Tyto vektory nemohou být lin. nezávislé, tedy existuje $a_n A^n u + \dots + a_1 Au + a_0 Iu = 0$.

14 Polynom $z^n + \dots + z^0 = 0$ lze rozložit
na součin kořenů: $C(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n) = 0$.

Protože A a I komutují, platí:

$$0 = z_n A^n u + \dots + z_1 A u + z_0 I u = C(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_n I) u.$$

Protože $C, u \neq 0$, $\exists (A - \lambda_i I)$ s netriviálním kernelem

$\Rightarrow \lambda_i$ je vlastní číslo matice A . $\square$

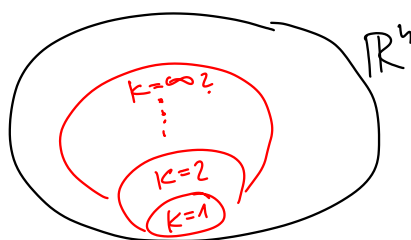
Tím vlastně máme všechno, co jsme získali díky determinantu, ale zbývá ukázat, jak geometricky vlastní vektory vypadají.

☀ Pro dané vlastní číslo tvoří jeho vlastní vektory podprostor $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Lze snadno dokázat, že tyto podprostory jsou nezávislé.

Vlastních vektorů však nemusí být dost, aby se z nich dala vytvořit báze, třeba $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ má vlastní číslo pouze jedno $\lambda = 1$, ale $\text{Ker}(A - I)$ je přímka. Proto zavedeme zobecněné vlastní vektory, které už dávají bázi.

Definice: Vektor $u \neq 0$ je zobecněný vlastní vektor k vlastnímu číslu λ , pokud $\exists k$, že $u \in \text{Ker}(A - \lambda I)^k$.

☀ $\text{Ker}(A - \lambda I)^k \subseteq \text{Ker}(A - \lambda I)^{k+1}$. Lemma: Stačí uvažovat $k \leq n$.



Důkaz: Necht' u je zobecněný vl. vektor pro λ a k , a necht' k je minimální takové.

Potom platí $k \leq n$, neboť vektory

$u, (A - \lambda I)u, \dots, (A - \lambda I)^{k-1}u$ jsou lineárně nezávislé.

To lze snadno ukázat. Necht'

$$\alpha_0 u + \alpha_1 (A - \lambda I)u + \dots + \alpha_{k-1} (A - \lambda I)^{k-1} u = 0,$$

potom násobením $(A - \lambda I)^{k-1}, \dots, (A - \lambda I)^2$ postupně ukážeme, že $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-2}$ jsou nulové, tedy komb. je triviální. $\square$

Tedy necht' $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ jsou všechna po dvou různá vlastní čísla, označme jejich zobecněné vlastní vektory $U_i := \text{Ker}(A - \lambda_i)^n$ (stačí n podle lemmatu). Opět lze ukázat, že $U_1, \dots, U_\ell$ jsou lineárně nezávislé.

Věta: Podprostory $U_1, \dots, U_\ell$ generují celý prostor.

Důkaz: Indukcí podle n , zjevně pravda pro $n=1$.

Podle lemmatu existuje pro A vlastní číslo λ .

Trik je uvážit trochu netypicky kernel a image $(A - \lambda I)^n$ (pro čtvercové matice jsou oba podprostory $\mathbb{R}^n$).

$$\text{Tvrđíme: } \underbrace{\text{Ker}(A - \lambda I)^n}_{V_K} \oplus \underbrace{\text{Im}(A - \lambda I)^n}_{V_I} = \mathbb{C}^n.$$

Obecně platí $\dim(\text{Ker}) + \dim(\text{Im}) = n$. Stačí tedy ukázat lineární nezávislost podprostorů.

Necht' $u \in V_K \cap V_I$, potom z definice platí:

$$(A - \lambda I)^n \cdot u = 0 \quad \text{a} \quad \exists v, \text{ že } (A - \lambda I)^n \cdot v = u.$$

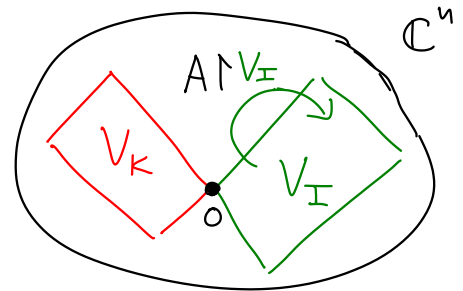
Ale potom $(A - \lambda I)^{2n} \cdot v = 0$, tedy v je zobecněný

16] vlastní vektor. Proto podle lemmatu platí $(A - \lambda I)^n \cdot v = 0$, a tedy $v = 0$. Tvrzení dokázáno.

Nyní $\dim(V_k) \geq 1$ (neboť $\exists$ vlastní vektor), proto $\dim(V_I) < n$. Důkaz dokončíme využitím indukčního předpokladu na $A \upharpoonright V_I$.

Abychom toto mohli udělat, musíme ukázat, že

$$A \upharpoonright V_I: V_I \rightarrow V_I.$$



To je ale pravda, neboť operátory komutují:

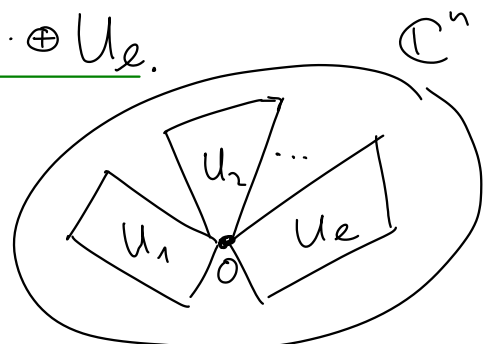
$$A \cdot (A - \lambda I)^n = (A - \lambda I)^n \cdot A.$$

Tedy necht' $x \in V_I$, $\exists y \in \mathbb{R}^n$, že $(A - \lambda I)^n y = x$. Platí $Ax = A \cdot (A - \lambda I)^n y = (A - \lambda I)^n \cdot Ay = (A - \lambda I)^n \cdot z$, tedy $Ax \in V_I$.

Proto z indukce má $A \upharpoonright V_I$ zobecněné vlastní vektory generující V_I , a tedy spolu s V_k generují zob. vlastní vektory A celý $\mathbb{C}^n$. $\square$

Proto platí, že $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_e$.

Algebraická násobnost vlastního čísla λ_i je $\dim(U_i)$; součet násobností je vždy n .



Lze snadno zvolit bázi ze zobecněných vlastních vektorů, na každém U_i volíme báze induktivně

rozšiřováním: $\text{báze Ker}(A - \lambda I) \Rightarrow \text{báze Ker}(A - \lambda I)^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{báze Ker}(A - \lambda I)^n$.

Vůči této bázi B se zobrazení A chová
jednoduše:

$$A = B \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_1 & ? \\ & \ddots \\ & & \lambda_1 \end{smallmatrix}} & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_2 & ? \\ & \ddots \\ & & \lambda_2 \end{smallmatrix}} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_e & ? \\ & \ddots \\ & & \lambda_e \end{smallmatrix}} \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

B obsahuje
vektory báze
po sloupcích.

Zavedení char. polynomu a determinantu:

Dokončíme bez důkazu, nejprve zavedeme minimální polynom matice A . Protože $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\exists$ minimální k takové, že

$A^0, A^1, A^2, \dots, A^k$ jsou lineárně závislé.

Tedy $\exists$ jediná netrivi. lineární kombinace

$$\alpha_0 A^0 + \alpha_1 A^1 + \dots + \alpha_{k-1} A^{k-1} + 1 \cdot A^k = 0.$$

Potom minimální polynom A je

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{k-1} z^{k-1} + z^k.$$

Platí pro něj $p(z) = (z - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (z - \lambda_e)^{\alpha_e}$, kde $\alpha_i \leq n$
je nejmenší přirozené číslo, že $\text{Ker}(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} = U_i$.

Zjevně $p(A) = 0$, a pokud libovolný polynom $q(A) = 0$,
potom q je násobek p .

Charakteristický polynom: $c(z) = (z - \lambda_1)^{\beta_1} \dots (z - \lambda_e)^{\beta_e}$,
kde $\beta_i = \dim(U_i)$ a platí $\alpha_i \leq \beta_i$. Proto platí
Cayley-Hamiltonova věta, že $c(A) = 0$.

Determinant: $\det(A) = \prod \lambda_i^{\beta_i}$, a platí $c(A) = \det(A - zI)$.

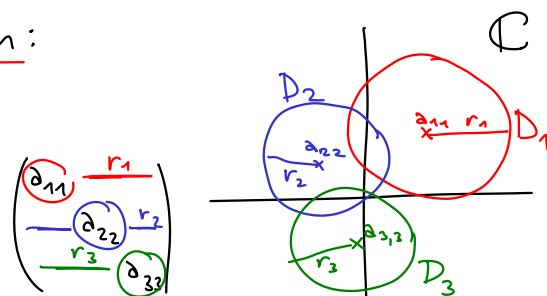
18] Další důležité vlastnosti vlastních čísel.

Je docela těžké je spočítat, ale často stačí odhad:

Gershgorinova věta o discích:

Nechť D_i jsou disky v $\mathbb{C}$ se středy v a_{ii} a poloměry

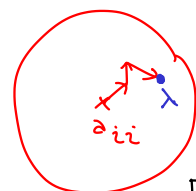
$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Potom $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n D_i$.



Důkaz: Pokud λ je vlastní číslo, $\exists x$, že $Ax = \lambda x$.

Existuje složka x_i , které je největší, BÚN $x_i = 1$ a $|x_j| \leq 1$.

Potom $\lambda \in D_i$, protože $\lambda = (Ax)_i = a_{ii} + \sum_{j \neq i} x_j \cdot a_{ij}$. Proto se můžeme od a_{ii} vzdálit nejvíc r_i , tedy $\lambda \in D_i$. Rotuje a možná zkrácí.



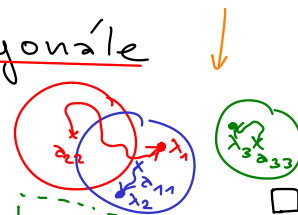
Rozšíření na komponenty disků: Pokud komponenta UD_i obsahuje k disků, je v ní k vlastních čísel.

Důkaz: Topologicky, vlastní čísla se spojitě mění v koeficientech matice. Spojitá transformace z diagonální části matice D do plné matice A:

$$A(t) = t \cdot A + (1-t)D; \quad t \in [0; 1].$$

$D \xrightarrow{t} A$. Trajektorie λ_i v čase.

Vlastní čísla začínou v bodech na diagonále a spojitě se hýbou v t. Ale nikdy nemohou přeskočit mezi komponentami.



Dekompozice

diagonalizace:

(Důkaz podobný jako důkaz hlavní věty, akorát maličko složitější.)

$A = SDS^{-1}$, když $\exists$ báze z vlastních vektorů.

Jordanova forma:

$A = SJS^{-1}$ z buněk $\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ & \lambda_i \end{bmatrix}$, existuje vždy.

Schurův rozklad: $A = QUQ^T$, existuje vždy s ortog. bazí.

spektrální rozklad: $A = QDQ^T$, když A je normální:

$A^*A = AA^*$, kde A^* je transpozice.

Lineární algebra III – 4. přednáška 4.11.2013 19

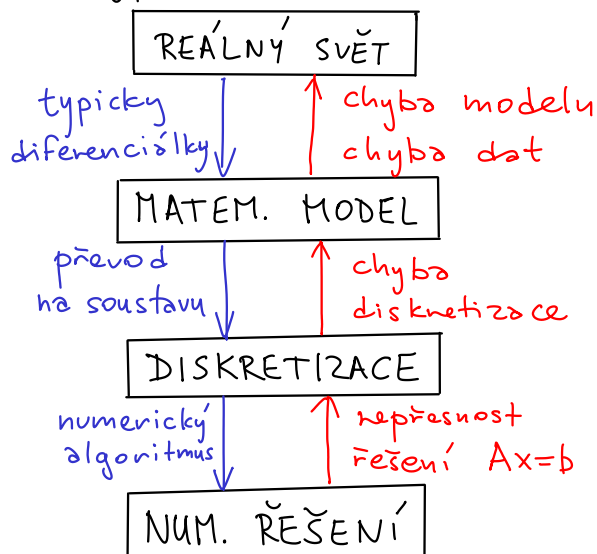
Dva světy lineární algebry – exaktní a ten numerický

Počítáme se zadokrouhlováním,
a chceme být schopni
analyzovat velikost chyby.

Pro to jsou dva důvody:

- 1) Je to rychlejší a jednodušší.
- 2) Nepotřebujeme přesně
vyřešit problém s ne přesným
zadáním.

Typická aplikace:



Prakticky se navíc počítá s floaty, které jsou složitě.

Zakladatel numerické lineární algebry Wilkinson pochopil
chyby při Gaussově eliminaci, v jeho Ph.D. práci.

Ukázka numerického algoritmu – Wilkinsonův iterativní
refinement (počítáme v malé přesnosti, vyřešíme ve velké).

$A\hat{x} \approx b$. vyřešíme nepřesně
 $r = b - A\hat{x}$. residuum (chyba ve zkoušce)
Dokud $\|r\|$ není malá:

$Az \approx r$. oprava chyby
 $\hat{x} := \hat{x} + z$. oprava řešení
 $r = b - A\hat{x}$. update residua

Ale my nechceme malé residuum, ale malou
chybu $e = x - \hat{x}$, kde $Ax = b$ je přesné řešení.
Jaký je vztah mezi chybou a residuem?

20 Odbočka: Proč je tak důležitá spojitost v analýze?

Kontrola nad velikostí chyby: Chyba $|f(x) - f(x+\epsilon)|$ pro dostatečně malou hodnotu ϵ je libovolně malá.

Tedy pokud $\hat{x} \rightarrow x$, potom $f(\hat{x}) \rightarrow f(x)$.

Pochopitelně pro výpočty potřebujeme mít i odhad, jak rychle. Pro $f(x) = Ax$ je residuum $r = A \cdot e = f(e)$.

Číslo podmíněnosti matice:

Mějme nepřesně vyřešenou soustavu $A(x + \delta x) = b + \delta b$, tedy $A\delta x = \delta b$. (δx není $\delta \cdot x$, značí to libovolný vektor malé normy). Chceme odhadnout $\|\delta x\|$ v závislosti na $\|\delta b\|$.

Předpokládejme, že A je diagonalizovatelná, s vlastními čísly uspořádanými $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

I A^{-1} je diagonalizovatelná, s vlastními čísly $\frac{1}{\lambda_i}$.

$\delta x = A^{-1} \delta b \Rightarrow$ Tedy jak moc A^{-1} může natahnout vektor? Nejvíce ve směru vlastního vektoru s největším vlastním číslem. Platí $\|\delta x\| \leq \frac{1}{|\lambda_n|} \cdot \|\delta b\|$. Číslo podmíněnosti??

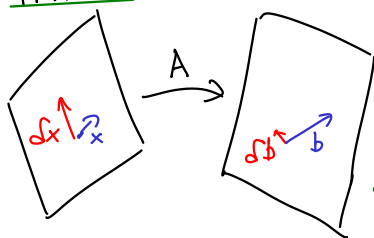
Ne úplně...

Nefunguje dobře, mění se s měřítkem!

$\rightarrow A$ a $1000A$ by se chovala numericky jinak, ale to je hloupost. Musíme uvažovat relativní změny:

změny:

Příklad:



$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Oprávněné číslo podmíněnosti.

Číslo podmíněnosti $k(A)$ je alespoň 6.

BÚNO $\|x\|=1$. Potom minimalizujeme $\frac{\|db\|}{\|b\|}$ vůči $\|dx\|$ 21

→ minimalizací $\|db\| \dots \frac{1}{|\lambda_n|}$ jako předtím.

→ maximalizací $\|b\| \dots x$ je vlastní vektor pro největší vlastní číslo (λ_1).

Proto $k(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$ pro diagonalizovatelnou matici A .

Obecně potřeba jiný odhad:

Třeba pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ & 1 \end{pmatrix}$ a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ & 1 \end{pmatrix}$ je
číslo podmíněnosti $k(A)$ zhruba 10000, ne $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = 1$.

Vlastní vektory neukazují v extrémních směrech.

Maticové normy – Podobně jako u vektorů, zavádějí geometrii nad prostorem matic (velikosti, vzdálenosti, ...). Axiomy:

1) $\|A\| \geq 0$ a $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$. 2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$. 3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Norma se nazývá multiplicativní, pokud $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Jsou dva typy norm, které se typicky používají:

Koeficientové – matice jako vektory s n^2 koeficienty.

Například Frobeniova norma: $\|A\|_F = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{nn}^2}$.

Operátorové – jak moc matice natahují vektory.

$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$ pro libovolnou vektorovou normu $\|\cdot\|_p$.

Budeme značit $\|A\|_2$ typicky pomocí $\|A\|$. Nyní můžeme určit číslo podmíněnosti pomocí operátorové normy.

[22] Předchozí analýza za funguje bez problémů, akorát místo největších vlastních čísel A a A^{-1} dostaneme normy:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \text{ tedy } \underline{k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}.$$

Kvůli multiplikativitě vždy platí $k(A) \geq 1$.

Lze udělat obecnější analýzu i s chybou v matici:

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b,$$

kde dostaneme po výpočtu, s předpokladem $\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Tyto odhady jsou pesimistické, běžně chyba má strukturu.

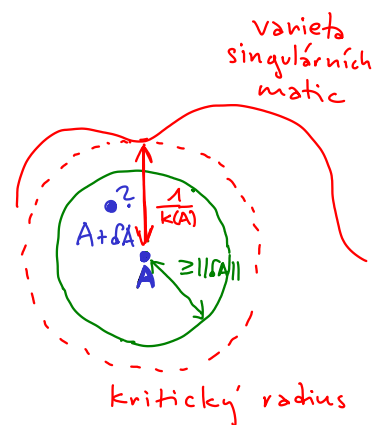
Geometrický pohled na číslo podmíněnosti:

Uvažme prostor všech matic, v geometrii dané normou.

Během výpočtu zavádíme chybu do matice:

$A \rightarrow A + \delta A$, kde $\|\delta A\|$ postupně roste.

Pokud známe pouze odhad $\|\delta A\|$, dostáváme kouli možných matic. Pokud by $A + \delta A$ mohla být singulární, potom můžeme dostat libovolný vektor x jako řešení soustavy, tedy numericky vyjde libovolně velká chyba.



Číslo podmíněnosti udává vzdálenost od nejbližší singulární matice:

Věta: $\min \left\{ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} : A + \delta A \text{ je singulární} \right\} = \frac{1}{k(A)} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}.$

Lineární algebra III – 5. přednáška 11.11.2013 [23]

Ortogonální matice a QR dekompozice

Důkaz věty z minula:

Alternativně chceme ukázat, že

$$\min \{ \| \delta A \| : A + \delta A \text{ je singulární} \} = \frac{1}{\| A^{-1} \|}.$$

Minimum je alespoň $\frac{1}{\| A^{-1} \|}$: Necht' $\| \delta A \| < \frac{1}{\| A^{-1} \|}$, neboli platí

$$1 > \| \delta A \| \cdot \| A^{-1} \| \geq \| A^{-1} \delta A \|. \quad \text{z multiplikativity normy.}$$

Platí lemma, že pro $\| X \| < 1$ je $I - X$ regulární,
kde $(I - X)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} X^i$. Suma konverguje kvůli $\| X \| < 1$.

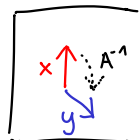
Proto $I + A^{-1} \delta A$ je regulární, a tedy $A + \delta A$ je regulární.

Existuje δA , že $\| \delta A \| = \frac{1}{\| A^{-1} \|}$ a $A + \delta A$ je singulární:

Zkonstruujeme. Z definice $\exists x$, že $\| A^{-1} x \| = \| A^{-1} \|$ a $\| x \| = 1$.

Položme $y = \frac{A^{-1} x}{\| A^{-1} x \|} = \frac{A^{-1} x}{\| A^{-1} \|}$, také platí $\| y \| = 1$.

Tedy vezmeme vektor nahlíející normu a jeho transformaci maticí A^{-1} , celkem logické.



Zkonstruujeme $\delta A = \frac{-xy^T}{\| A^{-1} \|}$ a je snadné ověřit, že $\| \delta A \| = \frac{1}{\| A^{-1} \|}$

a že $A + \delta A$ je singulární, neboť $(A + \delta A)y = 0$. $\square$

Zmiňované dekompozice matic:

$PA = LU$ (maticový zápis Gaussovy eliminace).

$A = Q \Lambda Q^T$ spektrální dekompozice pro $A^* A = A A^*$.

$A = S D S^{-1}$ / $S J S^{-1}$ diagonalizace, Jordanova forma.

$A = Q U Q^T$ Schurova dekompozice.

Plán: Chceme vybudovat další dekompozici $A = QR$.

[24] Motivace: Proč jsou tak zajímavé ortogonální matice?

Matice Q je ortogonální, když má kolmé sloupce, každý délky jedna. Algebraicky pak platí $Q^T Q = I_n$, tedy $Q^{-1} = Q^T$.

Geometricky jsou tyto transformace rotace a zrcadlení.

Zachovají normy a skalární součiny:

$$\|Qx\| = x^T Q^T Q x = x^T x = \|x\| \text{ a } \langle Qx, Qy \rangle = x^T Q^T Q y = \langle x, y \rangle.$$

Platí $\|Q\| = \|Q^T\| = 1$, a tedy $k(Q) = 1$, mají numericky nejlepší možnou podmíněnost. ↖ Prakticky třeba 1,001.

Mimochodem tvoří grupu O_n ortogonálních matic, $Q_1, Q_2 \in O_n \Rightarrow Q_1 Q_2 \in O_n$. Její podgrupa pouze rotací SO_n je také důležitá, řada aplikací v matematice.

Proč je QR dekompozice tak důležitá?

Ortogonální matice mají krasné vlastnosti, které jsme ilustrovali. Důležité ale je, že jsou hodně obecné, což ilustruje existence QR dekompozice libovolné A . Proto se používají ortogonální matice tak často.

QR dekompozice: Pro každou matici A existují ortogonální Q a horní trojúhelníková R , že $A = QR$.

Ukážeme si dva různé důkazy, pomocí dvou konstrukcí založených na různých myšlenkách.

1. konstrukce: Gram-Schmidtova ortogonalizace.

Algoritmus, který $A \rightsquigarrow Q$. Podobně jako u LU, získáme R jako zápis provedených kroků.

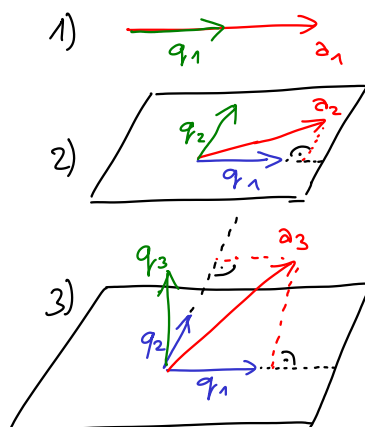
Zopakujme si nejprve, jak algoritmus funguje.

Konstruujeme $Q = [q_1, \dots, q_n]$ z $A = [a_1, \dots, a_n]$ postupně po sloupcích zleva doprava. 25

Od a_k odečteme ortogonální projekce na $q_1, \dots, q_{k-1}$ a výsledek normujeme.

$$\hat{q}_k := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{a_k^T q_i}_{\text{koeficient kolmé projekce}} q_i \quad \text{a} \quad q_k := \frac{\hat{q}_k}{\|\hat{q}_k\|}.$$

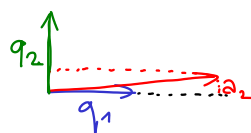
Příklad:



Každá úprava odpovídá násobení horní trojúhelníkovou maticí R_k zprava:

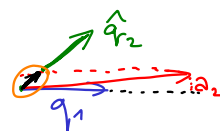
$$AR_1R_2 \dots R_n = Q, \quad \text{neboli} \quad A = Q \underbrace{R}_{\leftarrow} = R_n^{-1} R_{n-1}^{-1} \dots R_1^{-1}$$

Problém je, že tato metoda výpočtu QR je numericky velice nepřesná, když sloupce A ukazují podobným směrem. Exaktně:



Když úhel mezi $\langle q_1, \dots, q_{k-1} \rangle$ a a_k je malý, potom je norma $\hat{q}_k$ po odečtení malá. Proto i malá chyba se normováním zvětší!

Numericky:



Chyba před normováním se amplifikuje!

Z pohledu čísla podmíněnosti $\underline{k(AB) \leq k(A) \cdot k(B)}$, ale může být blízko. Pokud $\underline{k(R_i)}$ je velké, potom $\underline{k(R)}$ může být obrovské, výrazně větší než $k(A)$.

Můžeme však postupovat jinak, místo vyrobění Q sekvencí $R_1, \dots, R_n$ můžeme vyrobit R sekvencí $Q_1, \dots, Q_k$ s $k(Q_i) = 1$.

26 2. konstrukce: Householderovy reflexe a Givensovy rotace.

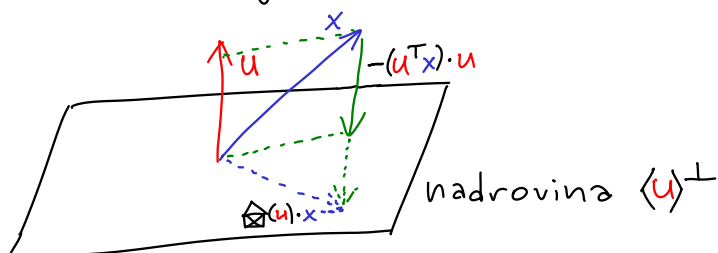
Speciální ortogonální matice, které $A \rightsquigarrow R$. Protože $k(Q) \approx 1$, platí $k(A) \approx k(R)$, a lépe to udělat nejde.

Householderovy reflexe:

Reflexe kolem nadroviny určené normálou u .

Ortogonální matice

$$\hat{\boxtimes}(u) = I - 2uu^T.$$



$$\hat{\boxtimes}(u) \cdot x = x - 2(u^T x) \cdot u.$$

Nechť $A = [a_1, \dots, a_n]$ a $R = [r_1, \dots, r_n]$. Chceme najít u_1 , že $\hat{\boxtimes}(u_1) \cdot a_1 = r_1$. Musí platit $\|a_1\| = \|r_1\|$ a $r_1 = \|a_1\| \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \|a_1\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Stačí zvolit $u_1 = \frac{a_1 - r_1}{\|a_1 - r_1\|}$ a dostaneme:

$$\hat{\boxtimes}(u_1) \cdot A = \begin{pmatrix} r_1 & ? \\ 0 & ? \\ \vdots & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\boxtimes}(u_2) \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \cdot \hat{\boxtimes}(u_1) \cdot A = \begin{pmatrix} r_1 & ? \\ 0 & r_2 & ? \\ \vdots & \vdots & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

Získali jsme první sloupec a řádek R. Další transformace modifikují jen $?$.

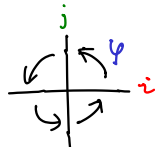
A tak dále, dokud nevynobíme R.

$$Q_n \cdots Q_1 \cdot A = R \Rightarrow A = QR \text{ pro } Q = Q_1^T Q_2^T \cdots Q_n^T.$$

Givensovy rotace: Jiné jednoduché matice, tentokrát nenulují sloupec, ale pouze jeden koeficient.

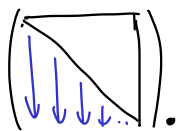
$$G(i, j, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ & & & \sin \varphi & \cos \varphi \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Rotace roviny $\langle e_i, e_j \rangle$ o úhel φ .

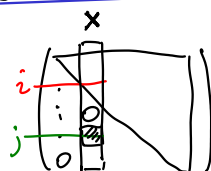


Výpočet QR:

A nulujeme



Jeden krok:



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{G(i, j, \varphi) \text{ s vhodným } \varphi} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lineární algebra III – 6. přednáška 25.11.2013 27

Singulární rozklad matice SVD

Motivace: Co je to numerický rank?

Problém je, že rank je nespojitý v koeficientech matice, tedy malá perturbace ho může hodně změnit. Numerický rank je hodnota ranku, která je zachována při zvolené perturbaci, jejíž velikost závisí na situaci. SVD odhalí num. vlastnosti matice, jinak nelze se singulárními maticemi pracovat. Třeba Gaussova nemá jak odhalit nulový koeficient od malého pivotu.

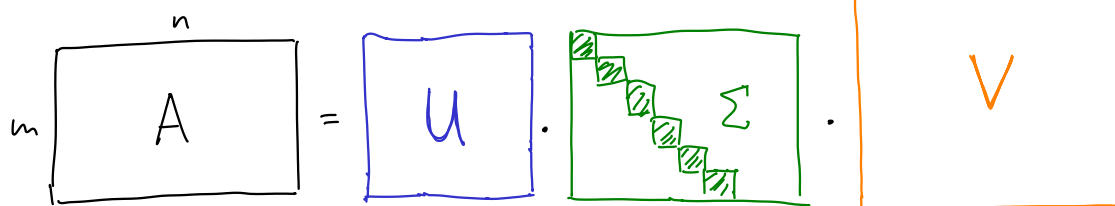
SVD je zobecnění spektrálního rozkladu:

$A = Q \Lambda Q^T$ existuje pouze pro normální matice, na druhou stranu diagonalizace nebo Jordanova forma se nedá udělat numericky přesně.

Proto slevíme a budeme mít dvě různé ortogonální matice. Pak platí:

Věta: Pro kždou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existuje

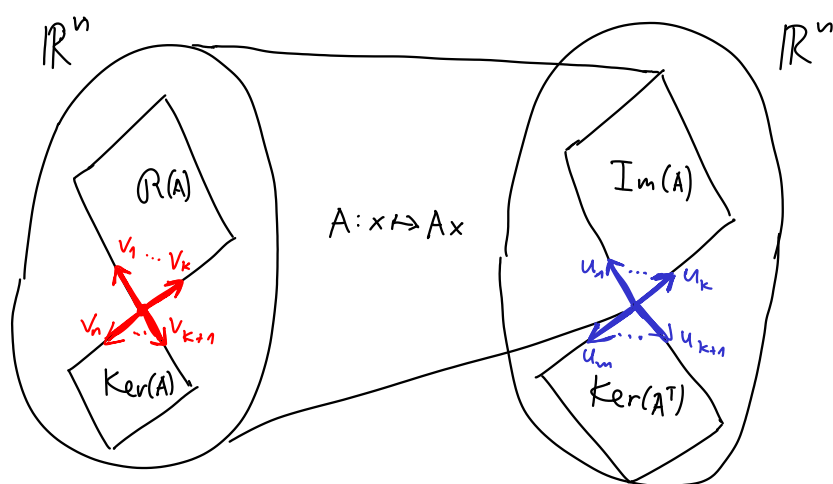
SVD rozklad $A = U \Sigma V^T$ ← ortogonální
 $m \times m$ $m \times n$ $n \times n$



[28] V matici Σ je obsažena úplná numerická informace o matici A . Prvky na diagonále G_i se nazývají singulární hodnoty, volí se typicky všechny pozitivní, utříděné podle velikosti:

$$G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_n \geq 0.$$

SVD vznikne geometricky volbou dvou ortogonálních bazí v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$:



Volba v kernelech je libovolná, ale v $R(A)$ a $Im(A)$ platí

$$A v_i = G_i \cdot u_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Obdobá rovnice pro vlastní čísla $Ax = \lambda x$.

První důkaz SVD: BÚNO $m \geq n$, indukcí dle velikosti.

Zjevně pravda pro $n=1$. Podobně pokud $A=0$, SVD existuje.

Proto $\|A\| > 0$ a existuje $\|A v_1\| = \|A\| \cdot \|v_1\|$. Zvolme

$$\|v_1\| = 1, \quad u_1 := \frac{A v_1}{\|A v_1\|} \quad \text{a} \quad G = \|A\|; \quad \text{platí} \quad A v_1 = G \cdot u_1. \quad \text{Zbytek indukci.}$$

Doplňme na ortogonální báze libovolně:

$$U_1^T = \begin{pmatrix} \overline{u_1^T} \\ \tilde{U}_1^T \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \tilde{V}_1 \end{pmatrix}$$

Nyní, kdyby $A = U_1 \Sigma V_1^T$ byla hledaná SVD,
 $U_1^T A V_1$ by byla diagonální.
To je pouze zčástě!

$$U_1^T A V_1 = \begin{pmatrix} u_1^T A v_1 & u_1^T A \tilde{V}_1 \\ \tilde{U}_1^T A v_1 & \tilde{U}_1^T A \tilde{V}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & -0- \\ 0 & \tilde{U}_1^T A \tilde{V}_1 \end{pmatrix}$$

Protože, kdyby to nebyla 0, dostaneme spor s $\|A\| = G$.

multiplik. normy

$$G = \|A\| = \|U_1^T A V_1\| \geq$$

$$\|(1, 0, \dots, 0)^T U_1^T A V_1\| =$$

$$\|(G | u^T A \tilde{V}_1)\| > G.$$

Protože $\tilde{U}_1^T \cdot A \cdot v_1 = G \cdot \tilde{U}_1^T \cdot u_1 = 0$

kvůli ortogonalitě báze U_1 .

Označme $A_2 = \tilde{U}_1^T A \tilde{V}_1$, z indukčního předpokladu existuje

SVD rozklad $\Sigma_2 = U_2^T A_2 V_2$. Proto platí

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{U_2^T} \end{pmatrix}}_{U^T} \cdot A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{V_2} \end{pmatrix}}_V = \begin{pmatrix} G \\ \boxed{\Sigma_2} \end{pmatrix} \quad \text{Tedy dostáváme SVD matice } A.$$

□

Druhý důkaz SVD: Využijeme toho, že matice $A^T A$ a $A A^T$ jsou symetrické, normální, PSD, tedy mají spektrální rozklady. Ortogonální báze: $A^T A v_i = \lambda_i v_i$.

Platí z ortogonalit: $v_j^T A^T A v_i = \lambda_i v_j^T v_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{pro } i=j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$

BÚNO necht' $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n$ a označme $A v_i = \sqrt{\lambda_i} u_i$; potom $u_1, \dots, u_k$ tvoří také ortogonální bázi. Doplněním u_i na ortogonální bázi $\text{Ker}(A^T)$ získáme SVD matice $A = U \Sigma V^T$, $G_i = \sqrt{\lambda_i}$. □

Aplikace SVD a užitečné vlastnosti.

• Rozepsáním $A = U \Sigma V^T$ po členech dostáváme

$$A = \sum_{i=1}^k G_i \cdot u_i v_i^T \quad \leftarrow \text{Součet } k \text{ 1-rankových matic.}$$

(Navíc definované ortogonálními bázelemi.)

• Pokud $\exists A^{-1}$, je SVD inverze: čtvercová inverze $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{G_n} \end{pmatrix}$.

$$A = U \Sigma V^T, \quad A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^T$$

Podobně lze pro libovolnou matici vyrobit pseudoinverzi

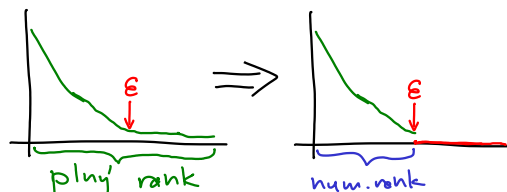
30 A^+ , která zobrazuje $\text{Im}(A)$ na $\mathcal{R}(A)$: $A^+ = V \Sigma^+ U^T$.

- $\|A\| = \|U \Sigma V^T\| = \|\Sigma\| = \underline{G_1}$, a tedy $\underline{\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{G_1}{G_n}}$.

Podobně pěkně se chová Frobeniova norma.

- Rank matice A je počet nenulových singulárních hodnot. Numerický rank je počet singulárních hodnot $\underline{G_i \geq \epsilon}$.

- Nejbližší matice A_k ranku k vznikne z A vynulováním $G_{k+1}, \dots, G_n$:



Důkaz: $\|A - A_k\| = \left\| U \cdot \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & G_{k+1} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & G_n \end{pmatrix} \cdot V^T \right\| = G_{k+1}$.

Zbývá ukázat, že žádná matice B ranku k není blíží.

$\dim \text{Ker}(B) = n - k$, uvažme podprostor $\langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle$, $\exists h$ existuje jednotkový vektor h v průniku:

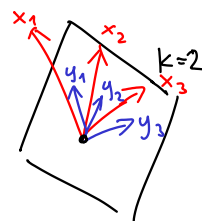
$$\|A - B\| \geq \|(A - B)h\| = \|Ah\| = \|U \Sigma V^T h\| = \|\Sigma(V^T h)\| = \left\| \Sigma \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

kde $\|a\| = 1$. Potom ale $\|\Sigma a\|$ je minimalizována

pro $a = e_{k+1}$, a tedy $\underline{\|\Sigma(V^T h)\| \geq G_{k+1}}$. $\square$

Lze využít například ke kompresi obrázků, protože k uložení A_k stačí paměť $O(kn)$. Nebo odfiltrování šumu.

- S využitím SVD se provádí ve statistice PCA (principal component analysis): Mějme data $x_1, \dots, x_n$ v $\mathbb{R}^m$. Chceme najít podprostor malé dimenze k , na nějž uděláme kolmou projekci $Px_i = y_i$. Chceme minimalizovat $\sum \|x_i - y_i\|$. Lze udělat pomocí SVD.



- Podle $A = U \Sigma V^T$ je každé lineární zobrazení složení rotace/reflexe, natožení v osách a další rotace/reflexe.

$$I = \text{circle} \xrightarrow{V^T} \text{circle} \xrightarrow{\Sigma} \text{ellipse} \xrightarrow{U} \text{ellipse} = A.$$

Geometricky vyobrazeno zobrazení jednotkové kružnice.

Lineární algebra III – 7. přednáška 2.12.2013 31

Numerický výpočet vlastních čísel obecné matice, QR metoda

Existují různé metody pro výpočet vlastních čísel:

- příné (málo iterací, obecně pro řadu matic),
- nepříné iterativní (hodně iterací, využívají specifické vlastnosti daných matic, viz Zdeněk Strakoš příště).

Protože výpočet vlastních čísel je ekvivalentní s hledáním kořenů polynomu, teoreticky každá metoda je iterativní.

Řešíme problém: Obecná nesymetrická matice A , chceme nalézt její vlastní čísla a podprostory vl. vektorů.

Zakrouhlování: Lze udělat podobné odhady, tedy existuje číslo podmíněnosti $k_\lambda(A)$, problematické jsou matice s $k_\lambda(A) = +\infty$ a $\frac{1}{k_\lambda(A)}$ je vzdálenost od nejbližší problém. matice. Necht' λ má násobnost jedna, s jednotkovým pravým vlastním vektorem x a levým vlastním vektorem y .

Potom pro perturbaci $A + \delta A$ a $\lambda + \delta \lambda$ platí:

$$|\delta \lambda| \leq \frac{\|\delta A\|}{|y^T x|} + O(\|\delta A\|^2), \quad \text{tedy} \quad k_\lambda(A) = \frac{1}{|y^T x|}.$$

Secans
úhlu mezi
 x a y .

Například pro symetrickou matici je $x = y$, a tedy $k_\lambda(A) = 1$. Lze provést výrazně složitější analýzu, více například v knize Applied Numerical Linear Algebra.

Jordanova dekompozice: Je nespojité v koeficientech matice
Například:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} \epsilon & 1 & 0 \\ 2\epsilon & 1 & 0 \\ 4\epsilon & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

s Jordanovými rozklady

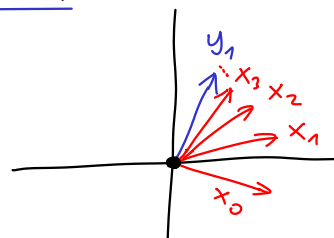
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \not\approx \begin{pmatrix} \epsilon & 2\epsilon & 3\epsilon \\ 2\epsilon & 3\epsilon & 4\epsilon \\ 3\epsilon & 4\epsilon & 5\epsilon \end{pmatrix}.$$

Proto se numericky používá Schurův rozklad, který je spojitý v koeficientech:

$$A = QUQ^T$$

32 První nápad na algoritmus: Mocninová metoda.

Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou vlastní vektory,
 $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ příslušná vlastní čísla.



Algoritmus:

Zvolit libovolný vektor x_0 .

Iterovat $k=1, \dots$

$$\begin{cases} x_k = \frac{A x_{k-1}}{\|A x_{k-1}\|} \leftarrow k\text{-tá approx. } y_1. \\ \tilde{\lambda}_k = x_k^T A x_k \leftarrow k\text{-tá approx. } \lambda_1. \end{cases}$$

Normování zajišťuje, že
 konvergujeme k y_1 .

Předpoklady: $d_1 \neq 0$ a $|\lambda_2| < |\lambda_1|$.

Příklad:

V přesné aritmetice

$$x_k = A^k x_0 / \|A^k x_0\|.$$

(Normujeme kvůli nepřetečení.)

Pokud $x_0 = d_1 y_1 + \dots + d_n y_n$,

$$A^k x_0 = d_1 \lambda_1^k y_1 + \dots + d_n \lambda_n^k y_n =$$

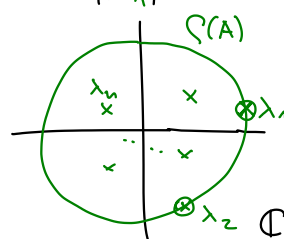
$$= d_1 \lambda_1^k \left(y_1 + \frac{d_2 \lambda_2^k}{d_1 \lambda_1^k} y_2 + \dots + \frac{d_n \lambda_n^k}{d_1 \lambda_1^k} y_n \right) \rightarrow d_1 \lambda_1^k y_1.$$

Rychlost konvergence je lineární, s koeficientem $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$.

Potíž: Konvergence je moc pomalá. Ohledně předpokladů,
 $d_1 \neq 0$ platí skoro vždy, ale $|\lambda_2| = |\lambda_1|$ často.

Dále předpokládáme, že A je diagonalizovatelná.

A umíme nalézt pouze největší vlastní číslo λ_1 .



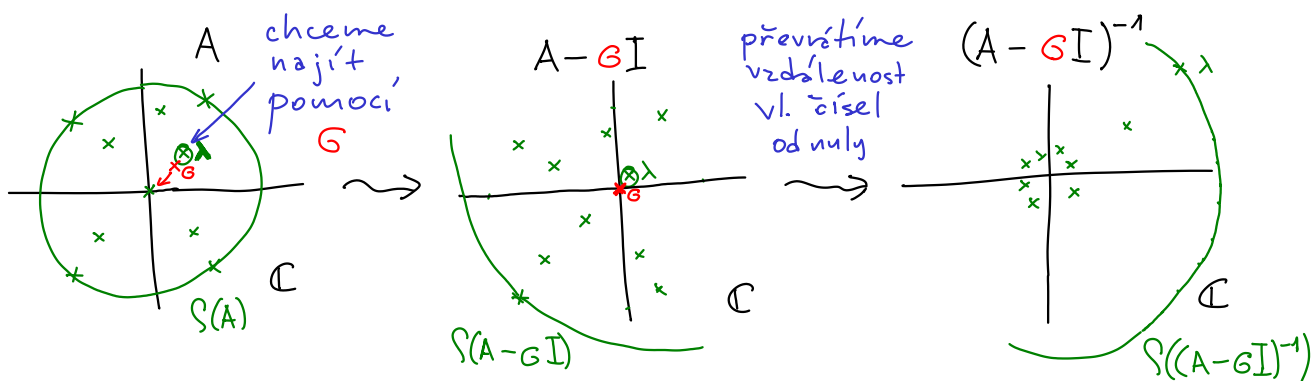
Inverzní mocninová metoda řeší tyto problémy částečně.

$A + \sigma I$ posouvá vlastní čísla o σ , A^{-1} má převrácená vlastní čísla.

Pokud máme odhad σ , jak vypadá vlastní číslo zhruba,
 aplikujeme mocninovou metodu $(A - \sigma I)^{-1}$, konvergujeme velice
 rychle. Klíčové je: Matice A a $(A - \sigma I)^{-1}$ mají stejné
 vlastní vektory, rychlost konvergence je $|\lambda - \sigma| / |\lambda' - \sigma|$.

Ale: musíme znát σ , což typicky neznáme.

↑
 Druhé nejblížeší
 vlastní číslo k σ .



Typicky se používají heuristiky pro volbu σ , více pořadí. [33]
Důležitá aplikace: Můžeme znát vlastní číslo λ , třeba z nějaké jiné metody jako metoda bisekce pro symetrické matice, ale nemusíme znát příslušný vlastní vektor x . Potom ho inverzní iterace dokáže enormně rychle najít.

Ortogonalní iterace: najde více vlastních vektorů a čísel.

Iterujeme několik vektorů. Aby všechny rekonvergovali k y_1 , udržujeme je ortogonálně. V maticovém zápisu:

Nechť je Z_0 libovolná ortogonální matice $n \times p$.

Iteruj $k=1, \dots$ iterujeme vektory maticí

$$\begin{cases} Y_k = A Z_{k-1} \\ \text{QR rozklad } Y_k = Z_k R_k \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \text{ortogonalizace} \\ \nwarrow \end{matrix}$$

Sloupové vektory Z_k konvergují k vlastním vektorům p největších vlastních čísel, analýza se udělá podobně. Pokud $p=n$ a vlastní čísla mají různé absolutní hodnoty, potom $Z_k^T A Z_k$ konverguje k Schurově rozkladu.

QR metoda – spojení obou metod $\begin{cases} \text{ortogonalní iterace} \\ \text{inverzní mocninové metody} \end{cases}$

$$A_0 = A.$$

iteruj $k=0, \dots$

Metoda vypadá magicky, ale ...

$$\begin{cases} \text{QR rozklad } A_k = Q_k R_k \\ A_{k+1} = R_k Q_k \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \text{prohození matic} \\ \nwarrow \end{matrix}$$

☺ Matice A_{k+1} a A_k jsou podobné:

$$A_{k+1} = R_k Q_k = \underbrace{Q_k^T Q_k}_{\text{id}} R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k.$$

Lemma: Platí $A_k = Z_k^T A Z_k$, kde Z_k je z ortogonalní iterace.

Důkaz: Indukcí, zjevně pravda na začátku. Nechť $A_k = Z_k^T A Z_k$.

Pak $A Z_k = Z_{k+1} R_{k+1}$, tedy $Z_k^T A Z_k = \underbrace{Z_k^T Z_{k+1}}_Q \underbrace{R_{k+1}}_R$. To je součin ortogonalní matice a

horní trojúhelníkové, tedy QR dekompozice, jednoznačně určené až na násobení sloupců Q a řádků R -1.

[34] Potom ale $Z_{k+1}^T A Z_{k+1} = (Z_{k+1}^T A Z_k) (Z_k^T Z_{k+1}) = RQ = A_{k+1}$.
 $Z_k Z_k^T$ R , úpravou Q
 $A Z_k = Z_{k+1} R$ $\square$

Lze přidat posunutí G_k do algoritmu:

QR rozklad $A_k - G_k I = Q_k R_k$.

$$A_{k+1} = R_k Q_k + G_k I.$$

Platí podobné vlastnosti jako předtím.

☀ Když G_k je přesně vlastní číslo, potom R_k je singulární.

Kdyby $(R_k)_{nn} = 0$, potom

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A'_{k+1} & * \\ * & -0 - G_k \end{pmatrix}$$

tedy G_k je vlastní číslo a dále pokračujeme s menší A'_{k+1} .

Konvergujeme při malých hodnotách.

Platí, že jedna iterace QR metody odpovídá inverzní iteraci na $((A_k - G_k)^T)^{-1}$. (Důkaz v Applied Numerical Linear Algebra.)

Dobrá heuristika je volba $G_k = (A_k)_{nn}$, vyjde kvadratická konvergence.

Pár poznámek k praktické implementaci QR metody:

Zcela ignorujeme, že vlastní čísla mohou být komplexní.

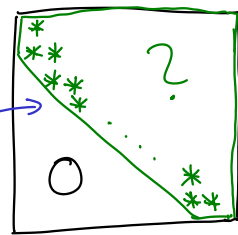
Zrovna tak nevíme, co znamená konvergence při dostatečně malých hodnotách v posledním řádku, bez odhadu chyby perturbace.

Kdybychom implementovali přímočaře, složitost by byla zhruba $O(n^4)$ (pro konstantně mnoho iterací na vlastní číslo), chceme $O(n^3)$.

Ke zrychlení se kroky aplikují implicitně, navíc převedeme matici A do horní

Hessenbergovy formy. Dále pro symetrickou matici dostaneme dokonce tridiagonální matici.

Nulová v dolním trojúhelníku vyjma první diagonály.



Lemma: Existuje ortogonální Q , že $H = Q A Q^T$ je horní Hessenbergova.

Důkaz: Aplikujeme $n-1$ Householderových reflexí podobně jako u QR, ale z obou stran. Proto nemůžeme vynulovat tolik.

$$\begin{pmatrix} 1 & -o & \\ & 1 & \\ 0 & & \Delta \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} * & & \\ * & & \\ 0 & ? & \\ 0 & & \end{pmatrix} \Rightarrow Q_1 A Q_1^T = \begin{pmatrix} * & & \\ * & & \\ 0 & ? & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Transpozice mění první sloupec.

A tak dál, postupně nulujeme sloupce...

$\square$

Lineární algebra III – 8. přednáška 16.12.2013 35

Metody Krylovových podprostorů a metoda konjugovaných gradientů (podle přednášky Z. Strakoše, rozšířeno).

↳ skvělá kniha Liesen, Strakoš: Krylov Subspace Methods

Nechť A je čtvercová regulární, dva fundamentální problémy jsou $Ax=b$ a $Ax=\lambda x$.

Už jsme se zabývali problémem, jak spočítat vlastní číslo.

- charakteristický polynom, ← nepoužitelné
- nějaký iterativní algoritmus.

Například: Mocninná metoda ze 7. přednášky.

Hledáme vlastní vektor v Krylovově podprostoru

$$\mathcal{K}_n(A, v) = \langle v, A \cdot v, A^2 v, \dots, A^{n-1} v \rangle$$

pro nějaký vektor v . Vektory postupně svírají malé úhly, proto chceme nalézt ortogonální bázi.

Arnoldiho algoritmus: Generování $\mathcal{K}_n(A, v)$ s Gram-Schmidtovou ortogonalizací, získáme ortogonální bázi $v_1, \dots, v_d$, když podprostor přestane růst po d krocích.

$$v_1 = v / \|v\|.$$

pro $n=1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \hat{v}_{n+1} = A v_n - \sum_{i=1}^n h_{i,n} v_i, & \text{kde } h_{i,n} = v_i^T A v_n. \\ h_{n+1,n} = \|\hat{v}_{n+1}\|. \\ v_{n+1} = \hat{v}_{n+1} / h_{n+1,n}. \end{cases}$$

Gram-Schmidtova ortogonalizace
klasická, alternativně modifikovaná

→ Zastavit pro $=0$.

Lze elegantně popsat v maticovém zápisu:

$$V_n = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

$$a \quad H_n = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{pmatrix}.$$

horní
Hessenbergova
matice

36 Potom po n krocích algoritmu platí

$$AV_n = V_n H_n + \beta_{n+1,n} V_{n+1} e_n^T$$

$\left(\begin{matrix} A v_1, \dots, A v_n \end{matrix} \right)$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 Vyjádření a vůči V_{n+1} $\uparrow$
 vůči vektorům v posledním $\uparrow$
 $v_1, \dots, v_n$ sloupci.

Rovnice popisuje vztah mezi vektory $v_1, \dots, v_{n+1}$ a $Av_1, \dots, Av_n$.

a v posledním kroku $AV_d = V_d H_d$.

$\mathcal{K}_d(A, v)$ je invariantní podprostor zobrazení A , neboť platí $A \mathcal{K}_d(A, v) \subseteq \mathcal{K}_d(A, v)$. Potom H_d je matice zobrazení $A|_{\mathcal{K}_d(A, v)}$ vůči ortogonální bázi $V_d = [v_1, \dots, v_d]$:

$$V_d^* (V_d V_d^* A) V_d = V_d^* A V_d = H_d.$$

Ortogonalní projekce na $\mathcal{K}_d(A, v)$ vůči bázi $v_1, \dots, v_d$.

Nyní se omezuje na symetrické matice $A = A^*$:

→ v řeči skalárního součinu $\langle Ax | y \rangle = \langle x | Ay \rangle$,
 tedy $\forall x, y: y^* A x = y^* A^* x \iff A = A^*$.

Existuje spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^*$ na systém ortogonálních 1-dimenzionálních podprostorů, na které můžeme nahlížet zvlášť.

V případě Arnoldiho algoritmu je H_d Hessenbergova symetrická, tedy tridiagonální T_d . Proto v_{n+1} závisí pouze na v_{n-1} a v_n .

$$T_d = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Lanczosův algoritmus pro $A = A^*$

$$AV_n = V_n T_n + \beta_{n+1,n} V_{n+1} e_n^T.$$

$$AV_n = \beta_n v_{n-1} + \alpha_n v_n + \beta_{n+1,n} v_{n+1}.$$

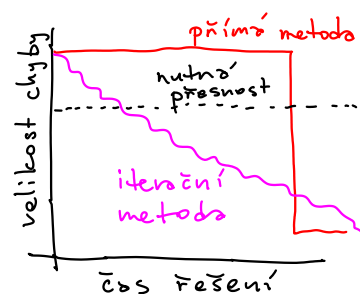
Při zokrouhlování se může ortogonalita ztratit.

krátká
rekurence

Řešení soustavy $Ax = b$

→ přímé metody - třeba Choleského rozklad $A = LL^*$; $LL^* x = b$ se řeší $Ly = b$, $L^* x = y$.

→ iterační metody - konstruujeme posloupnost $x_0, x_1, \dots, x_n \rightarrow x$, označme chybu $e_n = x - x_n$ a residuum $r_n = b - Ax_n = A e_n$.



Příklad iterční metody: stacionární/štepící metody

37

$A = M - N$, kde M je snadno invertovatelná matice.

$$Ax = b \Rightarrow Mx = Nx + b.$$

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

Poslední rovnost iterujeme $x_n = M^{-1}Nx_{n-1} + M^{-1}b$.

Pokud metoda konverguje, jde $e_n \rightarrow 0$. Konvergence a její rychlost závisí na spektrálním radiu $\rho(M^{-1}N)$.

Bekas, Curioni, Klavík: Metodu lze interpretovat jako aproximaci matice A pomocí M .

Metoda konjugovaných gradientů (CG):

A je symetrická, pozitivně definitní. Jedno z možných odvození: Chceme $x_n \in x_0 + \mathcal{K}_n(A, r_0)$, tedy $x_n = x_0 + z_n$, $z_n \in \mathcal{K}_n(A, r_0)$.

To volíme tak, aby $r_n \perp \mathcal{K}_n(A, r_0)$. Protože $r_n = A e_n$, ekvivalentně $e_n \perp_A \mathcal{K}_n(A, r_0)$, tedy x_n minimalizuje ze všech vektorů $\mathcal{K}_n(A, r_0)$ normu $\|x - x_n\|_A = \|e_n\|_A$.

V maticovém zápisu podmínky ortogonality:

$$0 = V_n^* r_n = V_n^* (b - Ax_n) = V_n^* (b - \underbrace{Ax_0}_{r_0} - Az_n).$$

Protože $v_1 = r_0 / \|r_0\|$, platí $V_n^* r_0 = \|r_0\| \cdot e_1$. Dále z_n leží v $\mathcal{K}_n(A, r_0)$, lze vyjádřit $z_n = V_n \cdot t_n$. Protože $V_n^* A V_n = T_n$, $0 = \|r_0\| \cdot e_1 - V_n^* A V_n t_n = \|r_0\| \cdot e_1 - T_n t_n$. Pak $x_n = x_0 + V_n t_n$.

Metoda konjugovaných gradientů je redukce $N \times N$ systému $Ax = b$ na $n \times n$ systém $T_n t_n = \|r_0\| \cdot e_1$.

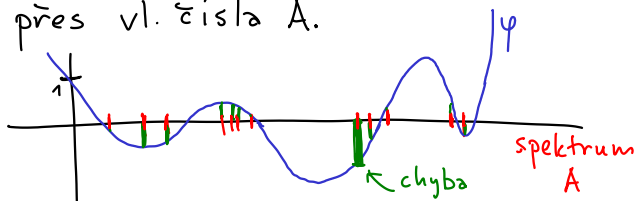
Metoda má vysoce nelineární chování, protože aproximuje řešení $A^{-1}b$ pomocí polynomu $\langle b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b \rangle$.

Hrubý obecný odhad konvergence:

$$\frac{\|x - x_n\|_A}{\|x - x_0\|_A} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1} \right)^n.$$

Odhad založen na spektru.
Ale 1) ignorujeme strukturu spektra,
2) ignorujeme pravou stranu.

Metoda konstruuje nejlepší možný polynom φ stupně n , že $\varphi(0) = 1$ a minimalizujeme maximum $\varphi(\lambda_i)$ přes vl. čísla A .



Výpočet vlastních čísel symetrických matic

Symetrické matice mají několik specifických vlastností, které umožňují zrychlit výpočet vlastních čísel:

→ Všechna vlastní čísla jsou reálná, i vl. vektory.
(Nemusíme počítat tedy v $\mathbb{C}$, je to efektivnější.)

→ Existuje spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^*$, který lze numericky spočítat, narozdíl od obecné diagonalizace.

→ Ortogonální redukce do Hessenbergova tvaru vytvoří tridiagonální matici $A = QTQ^*$,

$$\text{kde } T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{n-1} & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}$$

Cena redukce $\frac{4}{3}n^3$

Stačí tedy umět najít vlastní čísla tridiagonálních symetrických matic.

→ Teorie perturbace může využít vlastností jako Rayleyho kvocienty a Courant-Fisherovy věty.
Tedy odhady, jak moc se vlastní čísla $A+E$ liší od A pro malou $\|E\|$, jsou přesnější.

→ Efektivita metod se liší podle situace:
Chceme najít jen vlastní čísla (nebo jen některá)?
Chceme také najít vlastní vektory?

QR metoda pro symetrické matice:

Lze implementovat efektivněji pro tridiagonální matice.
Cena $O(n^2)$ pro vlastní čísla, $6n^3$ pro vlastní vektory.

Metoda rozděl a panuj:

Založená na překvapivé myšlence, kdy matici T rozdělíme na součet dvou. Obecně se vlastní čísla součtu hodně liší, ale tento specifický rozklad dokážeme přepočítat.

40

$$T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & & & \\ b_1 a_2 & \ddots & & & \\ & \ddots & b_{m-1} & & \\ b_{m-1} a_m & & & b_m & \\ b_m & a_{m+1} b_{m+1} & & & \\ & b_{m+1} & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{n-1} b_{n-1} & \\ & & & b_{n-1} a_n & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & & & \\ b_1 a_2 & \ddots & & & \\ & \ddots & b_{m-1} & & \\ b_{m-1} a_m & & & a_m b_m & \\ & & & a_{m+1} b_{m+1} & \\ & & & b_{m+1} & \ddots \\ & & & & \ddots & a_{n-1} b_{n-1} \\ & & & & & b_{n-1} a_n & \end{pmatrix} +$$

odečteno $4 \times b_m$

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ b_m & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \leftarrow \text{matice ranku jedno}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{pmatrix} + b_m \cdot v v^T \quad \text{kde } v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nyní rekurzivně spočteme spektrální rozklady $T_1 = Q_1 \Lambda_1 Q_1^T$ a $T_2 = Q_2 \Lambda_2 Q_2^T$. Potom

$$T = \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix}^T + b_m v v^T =$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{pmatrix} + b_m u u^T \right) \cdot \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix}^T,$$

kde platí

$$u = \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \cdot v,$$

tedy u je tvořeno
posl. sloupцем Q_1^T a
první sloupцем Q_2^T .

Musíme tedy určit vlastní čísla $D + \rho u u^T$, což je rank 1 modifikace diagonální matice.

Předpokládejme, že λ je vlastní číslo $D + \rho u u^T$ a není pro D .
Potom $D - \lambda I$ je regulární a

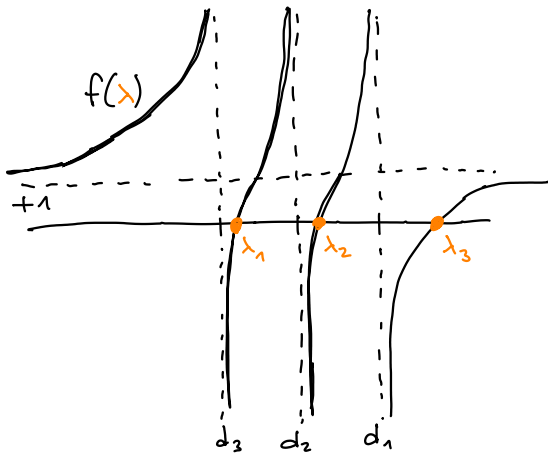
$$0 = \det(D + \rho u u^T - \lambda I) = \underbrace{\det(D - \lambda I)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det(I + \rho \cdot (D - \lambda I)^{-1} u u^T)}_{= 0}.$$

Užitečné lemma: $\det(I + x y^T) = 1 + y^T x$. Důkaz jako cvičení.

Tedy hledáme kořeny sekulární rovnice:

$$f(\lambda) = 1 + \rho u^T \cdot (D - \lambda I)^{-1} \cdot u = 1 + \rho \cdot \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{d_i - \lambda}.$$

Pro dané
koeficienty
 u_i a d_i .



Kořeny se hledají numericky třeba Newtonovou metodou.

Problém: $f(x)$ může mít méně než n kořenů. Třeba když D a $D + \rho uu^T$ sdílí vlastní čísla, $u_i = 0$ nebo dva diagonální koeficienty D jsou stejné. Situace se nazývá deflace.

Ve skutečnosti je jednoduché deflaci vyřešit a zrychluje algoritmus. Část vlastních čísel D se přenesse na $D + \rho uu^T$.

Zrychlí se hlavně výpočet vlastních vektorů.

Cena metody je $O(n^3)$, typicky s menší konstantou než QR.

Metoda bisekce:

Jedna z prvních efektivních metod, založena na Sylvesterově větě o setrvačnosti. Ta říká, že matice A a $X^T A X$ mají pro regulární matici X stejná znaménka vlastních čísel.

Důkaz věty: BÚNO necht' A je regulární, jinak důkaz provedeme pro $A + \epsilon I$, kde $\epsilon \rightarrow 0$. Důkaz je topologický, uvažme $X(t) A X(t)^T$ pro $t \in [0; 1]$, kde každá matice je regulární, $X(t)$ se spojitě mění, $X(1) = X$ a $X(0) = Q$. ← ortogonální

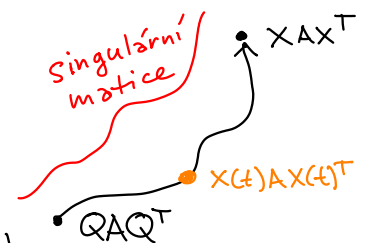
Nyní $X(0) A X(0)^T = Q A Q^T$ má stejná vlastní čísla jako A . Vlastní čísla se mění spojitě a nemohou změnit znaménko, jinak by nějaká $X(t) A X(t)^T$ byla singulární.

Zbývá konstruovat $X(t)$, $t \in [0; 1]$. Uvažme rozklad

$X = QR$, položíme $X(t) = tX + (1-t)Q$, dokázat regularitu je snadné. $\square$

Uvažme LDU dekompozici $A - zI = L D L^T$ bez pivotace. Počty znamének na diagonále D je roven počtu vlastních čísel $A > z$, $= z$ a $< z$. Přelíním přes různé hodnoty z můžeme identifikovat vlastní čísla A . Speciálně pokud hledáme na intervalu $[a, b]$.

Cena: $O(kn)$ pro k vlastních čísel. Nenalezneme vlastní vektory!



42

Literatura

Gilbert Strang:

Linear Algebra and its Applications

Skvělá úvodní kniha do lineární algebr, řada věcí vysvětlena na příkladech a aplikacích. Sám jsem se z ní naučil základy lineární algebry.

James Demmel

Applied Numerical Linear Algebra

Úvod do světa numerické lineární algebry, základní algoritmy spolu s obrázky a příklady. Velká část přednášky podle této knihy.

Jörg Liesen, Zdeněk Strakoš

Krylov Subspace Methods:

Principles and Analysis

Podrobný text popisující matematické základy a historii metod Krylovových podprostorů. Zejména metody CG a GMRES, které se řeší z různých úhlů pohledu.